Math. P.
969

Math. P. 96 g=
Crelle

<36630661770019
<36630661770019
Bayer. Staatsbibliothek

Ueber die
Anwendung der Rechnung
mit veränderlichen Größen
auf
Geometrie und Mechanik.

Nebst einigen vorhergehenden Bemerkungen
über die
Principien dieser Rechnung,

von

Dr. Aug. Leop. Crelle,
Königlich Preußischem Ober-Bau-Rathe.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Mit einem Kupfer.

Berlin 1816.
in der Maurerschen Buchhandlung.
Poststraße No. 29.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Bayerische
Staatsbibliothek
München

1.

Ich habe in meinem „Versuch einer Darstellung der Rechnung mit veränderlichen Größen," wovon der erste Band erschienen ist und die Principien der sogenannten Differential- und Variations-Rechnung enthält, die Darstellung dieser Rechnung auf eine Ansicht zu gründen gesucht, die von den Vorstellungen des Unendlich-Kleinen und der Grenzen ganz frei ist. Sie kann auf diese Weise eine Abtheilung des algebraischen Calculs ausmachen. Wenn auch die umgekehrte Ableitungs- oder Zurückleitungs-Rechnung, oder der sogenannte Integral-Calcul nicht abgehandelt worden ist, so läßt sich doch voraussehen, daß derselbe ebenfalls nur algebraischer Calcul seyn werde. Es war ohne Schwierigkeit möglich, die Rechnung an sich, der Algebra einzuverleiben, und dadurch elementar zu machen. Man hatte nirgends eine Veranlassung zu der dunkeln Vor-

stellung der Grenzen und des Unendlichen. Allein diese Veranlassung ist sogleich da, wenn man den Calcul auf Gegenstände der Geometrie und Mechanik anwendet. Hiebei die Vorstellung des Unendlichen ebenfalls wirklich zu vermeiden, nicht bloß sie in den Begriff der Grenzen und dergl. zu verstecken, scheint der Hauptgegenstand des Bestrebens zu seyn, dessen Nothwendigkeit so lange gefühlt worden ist, einen so fruchtbaren neueren Zweig der Mathematik, in Hinsicht auf Strenge und Klarheit, zu dem Range der, in dieser Hinsicht mit Recht bewunderten, Mathematik der Alten zu erheben. Lagrange hat in seiner Functionen-Theorie mit dem glücklichsten Erfolge die Möglichkeit bewiesen, allein es möchte nicht allein bei manchen Anwendungen, z. B. auf die Quadratur und Rectification, gegen die Strenge seiner Beweise mit Recht noch einiges zu erinnern seyn, sondern es scheint auch, daß den Vorstellungen, nächst der Strenge, wo möglich auch noch mehr Anschaulichkeit zu wünschen sey. Ein Versuch dazu, um alsdann die höhere Geometrie wirklich unmittelbar an die elementare analytische Geometrie anzuschließen, ist, nebst einigen vorangehenden Bemerkungen über die Principien der Rechnung, der Gegenstand der gegenwärtigen Abhandlung.

2.

Die vorauszuschickenden Bemerkungen betreffen die Untersuchung, welche das erste Princip der Rechnung ausmacht, nämlich die Entwickelung einer abhängigen Größe, wenn das Element, von welcher sie abhängt, sich verändert, oder die sogenannte Taylorsche Reihe, z. B. die Entwickelung von

$$f(x+k)$$

Ich habe in meiner Schrift zwei Arten der Entwickelung angegeben (in 40 und 42.). Die erste ist die Lagrangesche, mit denjenigen Zusätzen, in (40. II.), durch welche ich, einige Lücken ausfüllend, die Strenge des Beweises zu vermehren gesucht habe. Die andere ist die, welche man in der Differenzen-Rechnung antrifft. Daß die Entwicklung von $f(x+k)$ die Grundlage der gesammten Rechnung, und wie die Anwendung zeigt, auch dieser sey, zeigt sich bald. Es ist also nöthig, dabei wo möglich durchaus nichts zu wünschen übrig zu lassen. Nun scheint gegen die erste der beiden oben erwähnten Darstellungen noch Folgendes zu erinnern. Erstlich nämlich kann man sich berechtigt halten, den Beweis in gewisser Hinsicht für Induction zu erklären. Denn es ist zwar bewiesen worden, daß k in der Entwickelung von $f(x+k)$, nicht in Potenzen von

gebrochenen, noch von negativen, noch von transcendenten Exponenten erscheinen könne, woraus man schließt, daß die Exponenten ganze positive Zahlen seyn müssen, desgleichen, nach meiner Darstellung, daß sie alle Zahlen von 1 an seyn müssen; allein, strenge genommen, kann man verlangen, zu beweisen, daß die Exponenten nothwendig ganze positive Zahlen und nichts anders seyn müssen. Es bleibt die Frage übrig, ob nicht die Exponenten etwa Größen von einer, vielleicht uns unbekannten, Art seyn können, die alle Bedingungen der Entwickelung erfüllen und dennoch nicht ganze positive Zahlen sind. Zweitens ist nicht zu leugnen, daß die Entwickelung, als Grundlage einer Wissenschaft, also um auch dem Anfänger deutlich zu seyn, etwas verwickelt ist und einfacher gewünscht werden kann. Die zweite Darstellung aus der Differenzen-Rechnung ist, wie man sieht, unstreitig völlig direct, und alle obige Einwendungen treffen sie nicht, nur kommt es darauf an, richtig zu fassen, was es heiße, die willkührlich angenommene Differenz p in der Reihe der Elemente $x, x+p \ldots, = 0$ zu setzen. Der Liebe zur Wissenschaft verdanke ich, daß es mir Vergnügen macht, der nächste zu Einwendungen zu seyn gegen meine eigne Darstellung.

3.

Die Schwierigkeit bei der Lagrangeschen Art zu den Principien den Grund zu legen, scheint nicht sowohl in dem Beweise der allgemeinen Statthaftigkeit der Form der Taylorschen Entwickelung, als vielmehr in der richtigen Bestimmung dessen, was eigentlich zu beweisen ist, zu liegen. — Man soll eine Entwickelung von $f(x+k)$ geben. Wäre dieses die Aufgabe ganz, so müßte allerdings erst eine Bestimmung der Gestalt der Entwicklung *gefunden* werden. Aber sie ist es nicht, und kann es niemals seyn, weil es wirklich unzählige willkührliche Gestalten giebt, worin $f(x+k)$ sich verwandeln läßt. Zu der Aufgabe kommt noch Folgendes hinzu: Man *bedarf* zu allen *Anwendungen* der Entwickelung auf den Calcul und auf die Geometrie und Mechanik, also auf die Mathematik überhaupt, ausdrücklich nur einer Formel, namentlich einer Reihe, in welcher k von x abgesondert, und nur in Potenzen von ganzen positiven Exponenten, von 1 an, vorhanden ist. Also soll man einen *solchen* Ausdruck finden und keinen andern. Die bestimmte Aufgabe ist nicht: eine Entwickelung von $f(x+k)$ *überhaupt* zu geben, sondern eine Entwickelung zu geben, in welcher k auf die angezeigte Weise erscheint. Jetzt läßt sich

freilich fragen, erstlich: ist ein solcher Ausdruck möglich? und dann zweitens: wenn er möglich ist, welches ist seine Gestalt? Allein die Antwort auf die zweite Frage enthält diejenige auf die erste zugleich mit. Denn, läßt sich eine Gestalt der Entwickelung angeben, so ist auch nothwendig die Entwickelung möglich. Niemand hat noch behauptet, daß z. B. die wahrnehmbaren Dinge nicht möglich sind. Man suche also gerade zu in dem Ausdrucke, die Möglichkeit seiner Gestalt voraussetzend, der ausdrücklichen Forderung gemäß dem Ausdrucke die Gestalt

$$f(x+k) = fx + kf'x + k^2f''x + k^3f'''x \ldots,$$

gebend, die Größen $f'x$, $f''x$.... Wäre jetzt die Forderung unstatthaft, so müßte sich finden, daß die Größen $f'x$, $f''x$.... unmöglich sind; denn sind sie möglich, so ist auch die Reihe und folglich die Forderung möglich. Die Entwickelung geschieht nun weiter völlig nach Lagrange, z. B. wie in (40.) meines Vortrages von (III.) ab. Man findet, daß die Größen $f'x$, $f''x$.... nach der Reihe, auf einerlei Weise von einander abhängen, nämlich so, daß z. B. $f''x$ eben sowohl der Coefficient zu k ist, mit der Ordnungszahl des Gliedes dividirt, wenn man in $f'x$, $x+k$ statt x setzt; $f'''x$ derjenige zu k, wenn man in $f''x$, $x+k$ statt x setzt u. s. w. als es $f'x$ ist,

wenn man in fx, x + k statt x gesetzt hat. Jetzt bemerke man wohl, daß dieser letzte Umstand dasjenige ist, worauf sich nunmehr die Frage: ob die willkührlich angenommene Reihe für f(x + k) möglich sey oder nicht, gleichsam zurückzieht. Die Frage ist keinesweges aufgegeben; sie ist in diejenige: ob ein Coefficient zur ersten Potenz von k für die Größen f(x + k) f′(x + k),.... möglich sey, verwandelt worden. Ist ein solcher Coefficient möglich, so ist, weil die Deduction an sich selbst völlig strenge war, auch strenge bewiesen worden, daß die angenommene und nachher näher bestimmte Reihe wirklich der Größe f(x + k) gleich sey, und es bedarf eines andern Beweises für die Statthaftigkeit der Reihe nicht. Daß aber ein Coefficient zur ersten Potenz von k möglich sey, muß für jeden besondern Fall, für jede bestimmte Gestalt von fx, f′x u. s. w. bewiesen werden. Es kann nicht allgemein geschehen, eben weil die Deduction den Coefficienten unbestimmt läßt.

Ich sehe nicht, was gegen diese Vorstellung einzuwenden sey, und bin der Meinung, daß man mit völliger Strenge sogleich

$$f(x + k) = fx + kf'x + k^2f''x \ldots.$$

setzen müsse, weil man eine Reihe gerade von der Gestalt dieser, und keine an-

dere, nöthig hat, und die Reihe, im Fall sie durchaus eine andere seyn müßte, zu dem vorgesetzten Zwecke nicht brauchbar seyn würde. Dadurch ist dann die Grundentwickelung so einfach als möglich, zugleich aber auch so strenge geworden, als sich verlangen läßt.

4.

Um die nöthigen Bemerkungen über die zweite Art der Entwickelung von $f(x+k)$ durch Differenzen zu machen, will ich diese Entwickelung erst im Zusammenhange, und etwas verändert, hersetzen.

Man nehme willkührlich zwischen den beiden Größen x und $x+k$ eine beliebige Zahl, z. B. m Größen, $x+p$, $x+2p$ .... an, die um einerlei Größe p verschieden sind, so also, daß $k=mp$, so entsteht folgende Reihe von Größen, die von x abhängen:

fx, $f(x+p)$, $f(x+2p)$ ...... $f(x+mp)$

oder $f(x+k)$

Man bezeichne diese Größen durch α, β, γ .... ν

ihre ersten Differenzen durch a, a', a'' ....

die zweiten Differenzen durch b, b', b'' ....

und so weiter bis zur m^{ten} Differenz $=(m)$, die die letzte seyn mag und allein statt findet; nämlich:

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \ldots\ldots & \nu \\ & a & a' & a'' & a''' & \ldots\ldots\ldots & \\ & & b & b' & b'' & \ldots\ldots\ldots & \\ & & & c & c' & \ldots\ldots\ldots & \\ & & & & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ & & & & (m) & & \end{array}$$

so ist das letzte Glied wie bekannt,

$$\nu = \alpha + ma + \frac{m \,.\, m-1}{1 \,.\, 2} b \ldots\ldots + \frac{m \,.\, m-1 \ldots 1}{1 \,.\, 2 \ldots m} (m)$$

desgleichen ist

$$a = \beta - \alpha,\ b = \gamma - 2\beta + \alpha \ldots\ldots$$

$$(m) = \nu - m\mu + \frac{m \,.\, m-1}{1 \,.\, 2} \omega \ldots\ldots$$

also

$$\nu = \alpha + m(\beta - \alpha) + \frac{m \,.\, m-1}{1 \,.\, 2} (\gamma - 2\beta + \alpha) \ldots\ldots$$

$$+ \frac{m \,.\, m-1 \ldots 1}{1 \,.\, 2 \ldots m} (\nu - m\mu \ldots)$$

Nun war $m = \frac{k}{p}$, und

$$\alpha = fx,\ \beta = f(x+p),\ \gamma = f(x+2p) \ldots\ldots$$

$$\nu = f(x+mp) = f(x+k);$$

Es ist also

$$f(x+k) = fx + \frac{k}{p} [f(x+p) - fx]$$

$$+ \frac{\frac{k}{p} \,.\, \frac{k}{p} - 1}{1 \,.\, 2} [f(x+2p) - 2f(x+p) + fx] \ldots\ldots$$

$$+ \frac{\frac{k}{p}\cdot\frac{k}{p}-1\ldots\ldots 1}{1.2\ldots\ldots\frac{k}{p}}\,[f(x+mp)-mf\ldots\ldots]$$

oder

$$f(x+k) = fx + k\,\frac{f(x+p)-fx}{p}$$

$$+\frac{k.\overline{k-p}}{2}\;\frac{f(x+2p)-2f(x+p)+fx}{p^2}$$

$$\ldots\ldots\ldots+\frac{k.\overline{k-p}.\overline{k-2p}\ldots.p}{1.2\ldots.m}.$$

$$\frac{f(x+mp)-mf(x+\overline{m-1}.p)\ldots\ldots}{p^m}$$

Nun bemerke man, daß in dieser Reihe der Coefficient zu k entsteht, wenn man in fx, $x+p$ statt x setzt, fx von dem Resultat abzieht, und den Rest durch p dividirt. Ganz eben so entsteht aber aus ihm im folgenden Gliede der Coefficient zu $\frac{k.\overline{k-p}}{2}$. Denn wenn man in $\frac{f(x+p)-fx}{p}$, $x+p$ statt x setzt, so kommt $\frac{f(x+2p)-f(x+p)}{p}$. Zieht man davon die ursprüngliche Größe $\frac{f(x+p)-fx}{p}$ ab und dividirt den Rest durch p, so kommt $\frac{f(x+2p)-2f(x+p)+fx}{p^2}$,

welches der Coefficient zu $\frac{k.k-p}{2}$ im 3. Gliede der Reihe ist. Nicht minder entsteht aus diesem derjenige im folgenden Gliede, und so immer fort bis zum letzten. Bezeichnet man also die Operation: daß in eine von x abhängige Größe, $x+p$ statt x gesetzt, darauf die Größe von dem Facit abgezogen und der Rest durch p dividirt werden soll, durch ein vor die Größe gesetztes d, so läßt sich die Entwickelung von $f(x+k)$ also ausdrücken:

$$f(x+k) = fx + kdfx + \frac{k.\overline{k-p}}{1.2.} ddfx + \frac{k.\overline{k-p}.\overline{k-2p}}{1.2.3} dddfx \ldots$$

oder auch

$$f(x+k) = fx + kdfx + \frac{k.\overline{k-p}}{2} d^2fx + \frac{k.\overline{k-p}.\overline{k-2p}}{2.3} d^3fx \ldots$$

wo dfx, d^2fx .... Größen sind, die von x und p abhängen. Nun war p eine ohne Einschränkung willkührliche Größe, die größer und kleiner als o, und selbst als k, also auch $=o$ seyn kann. Bezeichnet man also das, was aus dfx, d^2fx.... wird, wenn man darin $p=o$ setzt, durch ∂fx, $\partial^2 fx$...., unbekümmert darum, was diese Größen seyn mögen, so erhält man:

$$f(x+k) = fx + k\partial fx + \frac{k^2}{2}\partial^2 fx + \frac{k^3}{2.3}\partial^3 fx \ldots\ldots$$

wo nun ∂fx, $\partial^2 fx$ .... Größen sind, die nur von x allein abhängen, und welches Resultat mit der bekannten Entwickelung übereinstimmt.

Hier kann es nun paradox scheinen, daß man die Differenz p in der Reihe x, x + p, x + 2p ...., = o setzt, weil man auf diese Weise gar nicht von x nach x + k zu kommen scheint; allein die Entwickelung hängt ja keinesweges von der Supposition p = o ab. Sie gilt allgemein, für jedes p, denn für jedes p hängen die Coefficienten zu k, $\frac{k.k-p}{2}$ u. s. w. auf gleiche Weise von einander ab. Daß man p = o setzt, hebt also wenigstens die gleichförmige Abhängigkeit der Coefficienten von einander, nicht auf. Ob es wirklich Größen ∂fx, $\partial^2 fx$ .... für p = o gebe, ist eine andere Frage, von deren Antwort die Abhängigkeit der Größen dfx, d^2fx ... keinesweges bedingt wird. Wäre es nicht erlaubt, p = o zu setzen, weil man dann nicht von x nach x + k gelangt, so müßte man finden, daß die Größen ∂fx, $\partial^2 fx$ .... unmöglich sind. Existiren die Größen, so wird jede aus der ihr zunächst

vorhergehenden durch einerlei Operation gefunden. Also auch nur bedingungsweise lehrt solches die allgemeine Entwickelung. Ob die Größen ∂fx, $\partial^2 fx$ .... existiren, muß in jedem besonderen Falle, für jede bestimmte Abhängigkeit f, gefunden werden.

Auch die zweite Deduction läßt also von der Frage: ob die Entwickelungs-Reihe statthaft sey, diejenige übrig: ob Coefficienten zu der ersten Potenz von k für die Entwickelungen von $f(x+k)$, $f'(x+k)$ .... existiren, ganz wie die erste. Sie findet zwar auf directem Wege, daß in der Entwickelungs-Reihe, k in Potenzen von ganzen positiven Exponenten vorkommen müsse, welches bei der ersten Deduction nur supponirt wurde; allein da die Statthaftigkeit der Supposition bei der ersten Deduction durch die Deduction selbst bewährt wird, und übrigens, wenn das Erscheinen von k in Potenzen von ganzen positiven Exponenten, nicht gerade dasjenige wäre, dessen man für die Anwendung bedarf, das Resultat der zweiten Deduction unbrauchbar seyn würde; so gebührt ihr vor der ersten kein Vorzug. Vielmehr scheint die erste die einfachere und folglich die bessere zu seyn.

Die Betrachtung der Fälle, wo besondere Werthe der veränderlichen Größe die Entwicke-

lung von $f(x+k)$ unbestimmt machen, liegt außer dem Umfange meiner Absicht. Ich will nur bemerken, daß, wie sich beweisen läßt, die Richtigkeit der Reihe in solchen besondern Fällen keinesweges aufhöre, sondern daß vielmehr nicht sowohl die Reihe, als der Ausdruck: sie sey für dergleichen Fälle falsch, (en defaut) unrichtig seye.

5.

Nachdem ich diese Bemerkungen über die Grundlage der Principien des Calculs, an welche sich alles was seine weitere Entwickelung angeht, ohne Schwierigkeit und Zweifel, dem Vortrage meiner Schrift zufolge, anschließt, vorangeschickt habe, will ich nunmehr zu der Anwendung auf Geometrie und Mechanik übergehen.

Die einfachsten Fälle der Anwendung, zuerst auf die Geometrie, sind die Theorie der Berührung, die Quadratur und Cubatur, und die Rectification der krummen Linien und Flächen, die ich kürzlich abhandeln will.

6.

Bei der Theorie der Berührung scheinen die Vorstellungen, die Lagrange zum Grunde legt, so vollkommen zu seyn, daß, was sie selbst betrifft,

nichts zu wünschen übrig bleibt. Eine Linie oder Fläche berührt eine andere so innig als möglich, wenn sie der berührten so nahe kommt, als es von einer Linie oder Fläche ihrer Art angeht; oder, was dasselbe ist, so nahe, daß keine andere Linie oder Fläche ihrer Art zwischen ihr und der berührten mehr durchgehen kann.

I.

Für die Berührung von Linien einfacher Krümmung sey nun die Gleichung einer Curve

$$fx = y$$

die Gleichung einer andern Curve, die jene berühren soll,

$$\varphi x = z$$

so sind die Ordinaten der beiden Curven für irgend eine andere Abcisse $x + k$

$$f(x+k) = fx + k\partial fx + \frac{k^2}{2}\partial^2 fx \ldots$$

und $\varphi(x+k) = \varphi x + k\partial\varphi x + \frac{k^2}{2}\partial^2\varphi x \ldots.$

Da nun die Linien so innig als möglich sich berühren, wenn sie einander so nahe kommen, als es angeht, so wird der Unterschied der Ordinaten

$$f(x+k) - \varphi(x+k) = fx - \varphi x + k(\partial fx - \partial\varphi x) + \frac{k^2}{2}(\ldots) \ldots.$$

so klein seyn müssen als möglich. Völlig $=0$, also der kleinste von allen würde dieser Unterschied seyn, wenn alle die Größen $fx-\varphi x$, $\partial fx-\partial\varphi x$ u. s. w. einzeln $=0$ seyn könnten; also wenn $fx=\varphi x$, $\partial fx=\partial\varphi x$ .... seyn könnte. Die beiden Linien würden alsdann ihrer ganzen Länge nach in einander fallen. Da aber das letztere nicht immer möglich ist, so kann der Unterschied nur der 0 so nahe kommen als möglich. Die Größen fx, φx, ∂fx, $\partial\varphi x$ ..... können aber nur dadurch einander gleich gemacht werden, daß man die constanten Parameter der berührenden Linie $z=\varphi x$ so bestimmt, wie es die Gleichungen $fx=\varphi x$, $\partial fx=\partial\varphi x$ .... verlangen; nemlich ihnen für jedes x die in x ausgedrückten Werthe giebt, welche den Gleichungen entsprechen. Da nun jedesmal Gleichungen so viele Größen bestimmen, als ihre Zahl beträgt, so können so viele von den Größen $fx-\varphi x$, $\partial fx-\partial\varphi x$ ...., $=0$ gemacht werden, als die berührende Linie Parameter hat. Es frägt sich nun, welche von jenen Größen zur Bestimmung der Parameter genommen werden müssen, damit die beiden Curven einander so nahe kommen als möglich. Schreibt man den Unterschied der Ordinaten wie folgt

$$\Delta = fx - \varphi x + k\left[\partial fx - \partial\varphi x + k\left[\frac{\partial^2 fx - \partial^2\varphi x}{2}\right.\right.$$

$$\left.\left.+ k\left[\frac{\partial^3 fx - \partial^3\varphi x}{2.3} \ldots\ldots\right]\right]\right]$$

so ist leicht zu sehen, daß es immer ein so kleines k geben wird, daß alle übrige Glieder der Reihe zusammen, für dieses k und folglich für alle noch kleinere k, kleiner werden als die von k unabhängige Größe $fx - \varphi x$. Für so kleine k würde also, wenn selbst alle die Größen $\partial fx - \partial\varphi x$, $\partial^2 fx - \partial^2\varphi x \ldots$ zusammen $= 0$ wären, die Größe Δ dennoch noch nicht so klein werden, als wenn gegentheils die Größe $fx - \varphi x = 0$ wäre. Da nun aber für jedes, also auch noch so kleine k, die Größe Δ so klein seyn soll als es angeht, so muß man vor allen zur Bestimmung der Parameter $fx - \varphi x = 0$ machen. Nachdem dieses geschehen, bleibt der Unterschied der Ordinaten

$$\Delta = k\left[\partial fx - \partial\varphi x + k\left[\frac{\partial^2 fx - \partial^2\varphi x}{2}\right.\right.$$

$$\left.\left.+ k\left[\frac{\partial^3 fx - \partial^3\varphi x}{2.3} \ldots\ldots\right]\right]\right]$$

Hier lassen sich über das was ferner zu thun ist, damit die Größe Δ von neuem so viel verkleinert werde als möglich, ähnliche Bemerkungen ma-

chen; denn es kommt nur darauf an, den Coeffizienten zu k innerhalb Δ so klein zu machen als möglich, und dieses geschieht auf eine ähnliche Weise wie oben, wenn man vor allem $\partial fx - \partial \varphi x = 0$ setzt. Es bleibt also ferner

$$\Delta = k^2 \left[\frac{\partial^2 fx - \partial^2 \varphi x}{2} + k \left[\frac{\partial^3 fx - \partial^3 \varphi x}{2.3} \ldots\right]\right]$$

und es folgt auf die nämliche Weise, daß man vor allem $\partial^2 fx - \partial^2 \varphi x = 0$ setzen müsse u. s. w. Die Größen, die man vorzugsweise zu Bestimmung der Parameter der berührenden Linie, $= 0$ setzen muß, sind also diejenigen, die der Reihe nach von vorn an auf einander folgen, nämlich

$$fx - \varphi x, \; \partial fx - \partial \varphi x, \; \partial^2 fx - \partial^2 \varphi x \ldots\ldots$$

Von diesen muß man so viele Gleichungen

$$fx = \varphi x, \; \partial fx = \partial \varphi x, \; \partial^2 fx = \partial^2 \varphi x \ldots\ldots$$

hernehmen, als Parameter vorhanden sind. Sind die Parameter daraus bestimmt worden, so kann zwischen der berührenden Linie die ihnen entspricht und der berührten keine andere von der Art der berührenden durchgehen, weil die beiden Linien einander so nahe kommen, als es von Linien ihrer Art möglich ist.

Eine gerade Linie hat 2 Parameter, ein Kreis 3 u. s. w., also sind zur Bestimmung einer geradlinigten Tangente die zwei Gleichungen $fx = \varphi x$ und $\partial fx = \partial \varphi x$, zur Bestimmung eines Krümmungs-

Kreises die drei Gleichungen $fx = \varphi x$, $\partial fx = \partial \varphi x$ und $\partial^2 fx = \partial^2 \varphi x$ nöthig u. s. w. Nach der Ordnungs-Zahl der Ableitungen nennt man die Berührung von einer geraden Linie, Berührung der ersten Ordnung; diejenige von einem Kreise, Berührung der zweiten Ordnung u. s. w. Ferner ist klar, daß, wenn für 2 krumme Linien zwar einige Parameter der berührenden Linie aus den Gleichungen $fx = \varphi x$, $\partial fx = \partial \varphi x \ldots$ bestimmt worden sind, aber nicht alle, die Linien sich zwar berühren, aber einander nicht so nahe kommen werden als möglich; vielmehr werden noch Linien von der Art der berührenden zwischen beiden durchgehen können. Ist bloß die erste Gleichung $fx = \varphi x$ benutzt, oder bloß ein Parameter bestimmt worden, so werden die beiden Linien bloß einen Punct gemein haben; sind bloß die ersten beiden Gleichungen benutzt, oder nur 2 Parameter bestimmt worden, so werden sie in dem Berührungs-Punct eine gemeinschaftliche geradlinigte Tangente haben; sind die 3 ersten Gleichungen benutzt worden, einen gemeinschaftlichen Krümmungs-Kreis u. s. w.

Wären die Gleichungen der beiden Linien nur unentwickelt gegeben, z. B.

$u = | xy | = 0$ für die berührte und

$p = | uz, a, b, c \ldots | = 0$ für die berührende Linie

(Man sehe wegen dieser und aller übrigen Bezeichnungen den Abschnitt meines Buchs von S. 58 bis 93; für die hiesige Stelle Art. 32. II.) so darf man nur die Gleichungen entwickelt sich vorstellen, wie $y = fx$, $z = \varphi u$, um zu finden, daß zur Bestimmung der Parameter, so viel ihrer vorhanden sind, oder so vieler als man davon will, z. B. von n Parametern, nächst $u = x$,

$$z = y,\ \partial z = \partial y,\ \partial^2 z = \partial^2 y \ldots\ldots \partial^{n-1} z = \partial^{n-1} y$$

gesetzt werden muß. Man darf nun die Gleichungen keinesweges erst wirklich entwickeln, sondern nur in die Gleichung der berührenden Linie $p = o$, und in ihre abgeleiteten, $\partial p = o$, $\partial^2 p = o \ldots\ \partial^{n-1} p = o$ die mit ihr zugleich statt finden; umittelbar, nächst $u = x$; $z = y, \partial z = \partial y \ldots\ \partial^{n-1} z = \partial^{n-1} y$ setzen. Man erhält auf diese Weise n Gleichungen

$$p = o,\ \partial p = o,\ \partial^2 p = o \ldots\ \partial^{n-1} p = o$$

die nächst den Größen x, y, $\partial y \ldots\ \partial^{n-1} y$ die n Parameter a, b, $c \ldots n$ enthalten. Nimmt man nun die Werthe von y, $\partial y \ldots\ \partial^{n-1} y$ aus den n Gleichungen der berührten Linie

$$u = o,\ \partial u = o,\ \partial^2 u = o \ldots\ \partial^{n-1} u = o,$$

oder was dasselbe ist, schafft man zwischen den 2n Gleichungen

$$p = o,\ \partial p = o,\ \partial^2 p = o \ldots\ \partial^{n-1} p = o \text{ und}$$
$$u = o,\ \partial u = o,\ \partial^2 u = o \ldots\ \partial^{n-1} u = o$$

die n Größen y, ∂y, $\partial^2 y$ .... $\partial^{n-1} y$ weg, so bleiben n Gleichungen übrig, die nur x und die n Parameter a, b, c ... n enthalten, und woraus also letztere in x ausgedrückt werden können. Die Werthe derselben in x die man findet, sind diejenigen, die zu der verlangten Berührung nöthig sind.

Die Betrachtung singulairer Fälle der Berührung liegt wieder außer dem Umfange meiner Abhandlung.

II.

Nicht um etwas Besseres als die vorige allgemeine Methode zu geben, sondern um ihre Vorzüge um so mehr fühlen zu lassen, will ich kürzlich einige, sonst nicht vorkommende, Methoden hersetzen, die geradlinige Tangente zu finden.

Es seyn Fig. 1. $AP = x$, $PM = y = |x|$ die Coordinaten der Curve, $PR = k$, $QP = -k$, mc die geradlinigte Tangente an M, LG diejenige an G, Tang. $CMH = b$; so kann man b auf folgende verschiedene Arten finden.

α.

Es ist $CH > GH$ und $MD < MF$ also, da

$$CH = -MD = +kb, \quad GH = k\partial y + \frac{k^2}{2}\partial^2 y$$

$+ \frac{k^3}{2\cdot3}\partial^3 y \ldots$, und $MF = - k\partial y + \frac{k^2}{2}\partial^2 y$
$- \frac{k^3}{2\cdot3}\partial^3 y \ldots$;

$kb > k\partial y + \frac{k}{2}\partial^2 y + \frac{k^3}{2\cdot3}\partial^3 y \ldots$

$-kb < -k\partial y + \frac{k^2}{2}\partial^2 y - \frac{k^3}{2\cdot3}\partial^3 y \ldots$ oder

$b > \partial y + \frac{k}{2}\partial^2 y + \frac{k^2}{2\cdot3}\partial^3 y \ldots < \partial y - \frac{k}{2}\partial^2 y$
$+ \frac{k^2}{2\cdot3}\partial^3 y \ldots$

Also soll b größer seyn als die Größe $\partial y + \frac{k^2}{2\cdot3}\partial^3 y \ldots$, wenn man dazu die Größe $\frac{k}{2}\partial^2 y \ldots$ hinzuthut, und kleiner, wenn man dieselbe Größe davon hinwegnimmt. Es wird also

$$b = \partial y + \frac{k^2}{2.3}\partial^3 y \ldots$$

seyn, wenn man $\frac{k}{2}\partial^2 y \ldots = 0$ setzt. Das letzte aber geht an, wenn man $k = 0$ macht, also ist für $k = 0$, $b = \partial y + \frac{k^2}{2.3}\partial^3 y \ldots$ mithin ist

$$b = \partial y$$

wie bekannt.

Der Beweis gilt schon nicht mehr für einen Wendungs-Punct, der gleichwol keine Ausnahme macht, noch weniger für andere als geradlinige Tangenten.

β.

Es war

$$GH = k\partial y + \frac{k^2}{2}\partial^2 y \ldots\ldots \text{ und } MF = -k\partial y + \frac{k^2}{2}\partial^2 y \ldots\ldots CH = bk,\ MD = -bk$$

also ist

$$CH - GH \text{ oder } CG = (b - \partial y)k - \frac{k^2}{2}\partial^2 y \ldots\ldots$$

$$MD - MF \text{ oder } BE = (-b + \partial y)k - \frac{k^2}{2}\partial^2 y \ldots\ldots$$

Nun sollen CG und BE beides positive Größen seyn, also sollen, weil k so klein seyn kann, daß das erste Glied der Reihe größer ist als alle übrigen, $b - \partial y$ und $-b + \partial y$ beides positive Größen seyn, welches nicht anders möglich ist, als wenn

$$b = \partial y .$$

Die Methode hat dieselben Einschränkungen wie die vorige.

γ.

Wenn man statt Tang. CMH, Tang. GMH = b setzt, so ist

$$b = \partial y \pm \frac{k}{2} \partial^2 y + \frac{k^2}{2.3} \partial^3 y \pm \ldots$$

b also kann so viele verschiedene Werthe haben als k, denn b hängt von k ab. Nun setze man

$$\pm \frac{k}{2} \partial^2 y + \frac{k^2}{2.3} \partial^3 y \pm \ldots = 0$$

so kommt

$$b = \partial y.$$

Dieser Werth von b allein hängt nicht von k ab. Er entspricht also einer geraden Linie CMB zwischen welcher und der Curve keine andere gerade Linie durchgehen kann. Denn jeder solchen andern geraden Linie würde ein anderes b zukommen, und jedes andere b hängt von k ab, also würde jede andere gerade Linie die Curve schneiden, und mithin nicht zwischen der Curve und CM durchgehen. Also entspricht $b = \partial y$ der Tangente.

Die andere Gleichung

$$\partial^2 y \pm \frac{k}{3} \partial^3 y + \frac{k^2}{3.4} \partial^4 y \pm \ldots = 0$$

welche aus der Supposition $\frac{k}{2} \partial^2 y \pm \frac{k^3}{2.3} \partial^3 y + \ldots = 0$, nächst $k = 0$, folgt, giebt diejenigen

andern Puncte, entfernt von M, in welchen die Tangente der Curve abermals begegnet und sie vielleicht schneidet, nämlich diejenigen k, die diesen Puncten entsprechen.

Wäre die Methode eben so leicht auf krummlinige Tangenten anzuwenden, so würde sie nicht zu verwerfen seyn.

δ.

Da die krumme Linie von M nach G stetig sich krümmen soll, also wenn MC und LG die Tangenten an M und G sind, der Winkel, den die Tangente mit der Abeissen-Axe macht, von CMH bis GLV stetig sich verändert, ferner CMH > GMH, GLV < GMH ist; so wird es irgend einen Punct der Curve zwischen M und G geben, für welchen der Winkel der Tangente mit der Abeissen-Axe, gleich GMH ist. Dieser Punct liegt nothwendig zwischen M und G, was auch k = HM seyn mag. Er sey N und PS sey = x. Nun wird der Tangenten-Winkel überhaupt von den Coordinaten der Curve, z. B. von x abhängen. Man kann also die trigonometrische Tangente desselben = φx setzen, so daß

$$b = \varphi x.$$

Dieses giebt die Tangente für den Punct N,

$= \varphi(x+\varkappa)$ und angenommenermaßen $\varphi(x+\varkappa)$ $=$ Tang. $GMH = \frac{\Delta y}{k}$. Also ist

$$\varphi x + \varkappa\partial\varphi x + \frac{\varkappa^2}{2}\partial^2\varphi x \ldots = \partial y + \frac{k}{2}\partial^2 y$$
$$+ \frac{k^2}{2.3}\partial^3 y \ldots$$

Aber der Punct N bleibt zwischen M und G, was auch k seyn mag, also auch für $k = o$, mithin findet man, wenn man $k = o$ setzt, welches übrigens allerdings angeht, weil k jeden beliebigen Werth haben kann:

$$\varphi x \text{ oder } b = \partial y$$

wie gewöhnlich. Die Methode ist wieder für krummlinige Tangenten nicht wohl anwendbar.

III.

Die Berührung der Curven doppelter Krümmung läßt sich auf folgende Weise, ohne die Betrachtungen über die Berührung von Curven einfacher Krümmung zu wiederholen, unmittelbar auf diese gründen.

Es sey nämlich durch die beiden Gleichungen

$$u = |xyz| = o \text{ und } v = |xyz| = o$$

eine krumme Linie doppelter Krümmung gegeben, die von einer andern eben solchen Linie, deren Gleichungen

$\alpha = |pqr| = 0$ und $\beta = |pqr| = 0$

sind, so innig als möglich berührt werden soll. Man stelle sich die Projection der berührten Curve auf zwei Coordinaten-Ebenen, z. B. auf diejenigen der x und y und der x und z; über diese Projectionen aber zwei Cylinder-Flächen vor; so ist der Durchschnitt dieser Cylinder-Flächen die gegebene Curve doppelter Krümmung. Nun stelle man sich auf denselben Coordinaten-Ebenen auch die Projectionen der Curve vor, die die erste berühren soll, und suche von diesen letzten Projectionen diejenigen, die die Projectionen der berührten Curve so innig als möglich berühren; so wird, wenn man wieder über diesen letzten Projectionen Cylinder-Flächen annimmt, ihr Durchschnitt diejenige Curve doppelter Krümmung seyn, die die gegebene so genau als möglich berührt; das heißt, die sie nicht schneidet und ihr von allen Curven ihrer Art am nächsten kommt. Denn daß sie erstlich die gegebene Curve nicht schneidet, ist klar, weil die Cylinder-Flächen sich nicht schneiden, folglich auch keine Curve in ihnen; daß sie aber der gegebenen so nahe kommt als möglich, folgt also. Wenn nämlich die Projectionen der Entfernung Δ zweier Puncte der sich berührenden Curven doppelter Krümmung, zu einerlei Abcissen gehörig, ∂ und δ heißen; so ist

$\Delta = \sqrt{(\partial^2 + \delta^2)}$. Nun sind ∂ und δ die Entfernungen der Projectionen jener zwei Puncte, also die Entfernungen zweier Puncte in den Projectionen der Curve zu einerlei Abcissen. Diese Projectionen aber kommen einander angenommenermaßen so nahe als möglich, also sind die Größen ∂ und δ so klein als möglich, folglich ist es auch Δ, und mithin kommen die sich berührenden Curven doppelter Krümmung einander so nahe als möglich.

Man suche also diejenigen krummen Linien einfacher Krümmung, die die Projectionen der gegebenen Curve so genau als möglich berühren. Sie sind die Projectionen der verlangten berührenden Curve doppelter Krümmung. Stellt man sich zwischen den Gleichungen $u = o$ und $v = o$ der berührten Curve erstlich y und dann z eliminirt vor, also zwei Gleichungen von der Form $|xz| = o$ und $|xy| = o$, so sind, wenn man aus diesen Gleichungen y und z in x entwickelt,

$$y = |x| \text{ und } z = |x|$$

die Gleichungen der Projectionen der berührten Curve, denn sie enthalten die Verhältnisse zwischen x und y und zwischen x und z, welche die Projectionen vorstellen. Eben so sind aus den Gleichungen $\alpha = o$ und $\beta = o$ der berührenden Curve die Gleichungen

$q = |p|$ und $r = |p|$

diejenigen ihrer Projectionen. Nun sollen sich die Projectionen so genau als möglich berühren. Man hat also zwei Paare von Linien einfacher Krümmung, nämlich $y = |x|$, $z = |x|$ und $q = |p|$, $r = |p|$ die so innig als möglich sich berühren sollen. Auf solche Weise wird die Berührung doppelter Krümmung auf diejenige einfacher Krümmung zurückgebracht. Man darf also nur, wie es die Lehre von der einfachen Krümmung verlangt, damit die begehrte Berührung statt finde, nächst $x = p$, die Gleichungen

$$y = q, \ \partial y = \partial q \ldots \text{ und } z = r, \ \partial z = \partial r \ldots$$

setzen, so weit als es für die Zahl der vorhandenen Parameter der berührenden Curve nöthig ist, z. B. wenn $2n$ Parameter vorhanden sind, bis zu $\partial^{n-1}y = \partial^{n-1}q$ und $\partial^{n-1}z = \partial^{n-1}r$. Hierauf, ohne aus den Gleichungen $u = o$ und $v = o$ der berührten und $\alpha = o$ und $\beta = o$ der berührenden Curve die Größen y und z, q und r wirklich zu entwickeln, darf man nur, auf eine ähnliche Weise, wie oben bei der einfachen Krümmung, in sie und ihre abgeleitete Gleichungen $\frac{\partial}{x}(u) = o$, $\frac{\partial}{x}(v) = o \ldots$ und $\frac{\partial}{p}(\alpha) = o$, $\frac{\partial}{p}(\beta) = o \ldots$, bis zur $n-1$ten Ordnung der Ableitung, wenn

2n Parameter zu bestimmen sind, nächst $x = p$, $q = y$, $\partial y = \partial q \ldots \partial^{n-1}y = \partial^{n-1}q$ und $z = r$, $\partial z = \partial r \ldots \partial^{n-1}z = \partial^{n-1}r$ setzen und darauf zwischen den vorhandenen 4m Gleichungen die 2n Größen y, $\partial y \ldots \partial^{n-1}y$; z, $\partial z \ldots \partial^{n-1}z$ eliminiren, so bleiben 2n Gleichungen übrig, die nur die 2n Parameter der berührenden Curve und x enthalten, aus welchen sich also besagte Parameter in x ausdrücken lassen, welche Größen in x ihnen dann beigelegt werden müssen, wenn die Curve die gegebene so genau berühren soll als möglich.

Die Gleichungen einer geraden Linie im Raume haben zusammen 4 Parameter. Für eine geradlinige Tangente muß man also mit der Ableitung bis zur ersten Ordnung gehen, nämlich die Gleichungen $u = 0$, $v = 0$, $\partial u = 0$ und $\partial v = 0$ nehmen. Der ebene Kreis im Raume oder der Durchschnitt einer Kugel mit einer Ebene hat 6 Parameter, weil eine Ebene durch einen bestimmten Punct 2, und die Kugel 4 hat; also muß man für den Krümmungs-Kreis, bei der doppelten Krümmung, bis zur zweiten Ordnung der Ableitung gehen u. s. w.

Die Untersuchung der Berührung bei doppelter Krümmung auf diese Weise auf diejenige einfacher Krümmung unmittelbar zu gründen, anstatt

die letztere zu wiederholen, wie Lagrange thut, scheint mir einem mathematischen Vortrage angemessener und nothwendig.

IV.

Die Theorie der Berührung der Flächen von Flächen wäre folgende.

Es sey eine Fläche durch die Gleichung

$$u = |xyz| = 0$$

gegeben, die von irgend einer andern Fläche

$$\alpha = |pqr| = 0$$

so innig als möglich berührt werden soll, so sollen die beiden Flächen einander so nahe kommen als möglich. Man stelle sich aus jeder Gleichung eine der drei Coordinaten z. B. r und z entwickelt, nämlich in die andern beiden ausgedrückt vor, auf die Weise

$$r = |pq| \text{ und } z = |xy|$$

so sollen nun für gleiche Abcissen

$$p = x \text{ und } q = y$$

die Ordinaten r und z, also auch die Ordinaten für beliebige andere Abcissen $x + k$ und $y + e$ so wenig verschieden seyn als möglich. Die letzten Ordinaten entwickelt und von einander abgezogen, giebt

$$z - r + k\left(\frac{\partial}{x}z - \frac{\partial}{x}r\right) + \frac{k^2}{2}\left(\frac{\partial^2}{x^2}z - \frac{\partial^2}{x^2}r\right)\ldots$$

$$+ e\left(\frac{\partial}{y}z - \frac{\partial}{y}r\right) + ke\left(\frac{\partial^2}{xy}z - \frac{\partial^2}{xy}r\right)\ldots$$

$$+ \frac{e^2}{2}\left(\frac{\partial^2}{y^2}z - \frac{\partial^2}{y^2}r\right)\ldots$$

Diese Größe soll also so klein seyn als möglich. Man setze

$$e = mk$$

so wird, weil k und e völlig willkührliche Größen sind, m eine Größe seyn, die von den übrigen unabhängig ist, und der Unterschied der Ordinaten wird seyn

$$z - r + k\left[\frac{\partial}{x}z - \frac{\partial}{x}r + m\left(\frac{\partial}{y}z - \frac{\partial}{y}r\right)\right]$$

$$+ \frac{k^2}{2}\left[\frac{\partial^2}{x^2}z - \frac{\partial^2}{x^2}r + 2m\left(\frac{\partial^2}{xy}z - \frac{\partial^2}{xy}r\right)\right.$$

$$\left. + m^2\left(\frac{\partial^2}{y^2}z - \frac{\partial^2}{y^2}r\right)\right]\ldots$$

oder

$$z - r + k\left[\frac{\partial}{x}z - \frac{\partial}{x}r + m\left(\frac{\partial}{y}z - \frac{\partial}{y}r\right) + \frac{k}{2}\left[\frac{\partial^2}{x^2}z - \frac{\partial^2}{x^2}r\right.\right.$$

$$+ 2m\left(\frac{\partial^2}{xy}z - \frac{\partial^2}{xy}r\right) + m^2\left(\frac{\partial^2}{y^2}z - \frac{\partial^2}{y^2}r\right)$$

$$\left.\left. + \frac{k}{3}\left[\ldots\ldots\right]\right]\right]$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit demjenigen in (6.) der bei der Untersuchung der Berührung einfach gekrümmter Curven vorkam, so findet man, daß, damit der Unterschied der Ordinaten so klein werde als möglich, vor allem $z - r = o$, nächst dem $\frac{\partial}{x} z - \frac{\partial}{x} r + m\,(\frac{\partial}{y} z \quad \frac{\partial}{y} r) = o$, hierauf $\frac{\partial^2}{x^2} z - \frac{\partial^2}{x^2} r + 2m\,(\frac{\partial^2}{xy} z - \frac{\partial^2}{xy} r)$ $+ m^2\,(\frac{\partial^2}{y^2} z - \frac{\partial^2}{y^2} r) = o$ u. s. w. gesetzt werden müsse. Da aber m eine von den übrigen unabhängige Größe war, so sind die Coefficienten zu den verschiedenen Potenzen von m einzeln $= o$, so daß $\frac{\partial}{x} z - \frac{\partial}{x} r = o$, $\frac{\partial}{y} z - \frac{\partial}{y} r = o$ u. s. w. oder

$$z = r$$

$$\frac{\partial}{x} z = \frac{\partial}{x} r, \quad \frac{\partial}{y} z = \frac{\partial}{y} r$$

$$\frac{\partial^2}{x^2} z = \frac{\partial^2}{x^2} r, \quad \frac{\partial^2}{xy} z = \frac{\partial^2}{xy} r, \quad \frac{\partial^2}{y^2} z = \frac{\partial^2}{y^2} r$$

u. s. w. ist.

Dieses sind die Gleichungen, die unmittelbar zur Bestimmung derjenigen Werthe der Parameter der berührenden Fläche in x und y dienen, welche zu der Berührung nöthig sind, und zwar im

Fall die Gleichungen der Flächen in der entwickelten Gestalt

$r = |pq|$ und $z = |xy|$

gegeben sind. Man muß, damit die Berührung so innig werde als möglich ist, davon so viel nehmen, als Parameter vorhanden sind.

Wären die Gleichungen der Flächen unentwickelt gegeben, so darf man nur von den beiden Gleichungen

$u = o$ und $\alpha = o$

ohne sie erst zu entwickeln, sogleich die abgeleiteten Gleichungen $\frac{\partial}{x}(u) = o$, $\frac{\partial}{y}(u) = o$ .....

und $\frac{\partial}{p}(\alpha) = o$, $\frac{\partial}{q}(\alpha) = o$ ..... bis so weit nehmen, daß ihre Zahl z. B. 2n, doppelt so groß ist als die Zahl n der Parameter der berührenden Fläche. Hierauf setzt man in diese Gleichungen, nächst $p = x$ und $q = y$, die obigen Bedingungen der Berührung

$$z = r,\ \frac{\partial}{x} z = \frac{\partial}{x} r,\ \frac{\partial}{y} z = \frac{\partial}{y} r \text{ .....}$$

und schafft zwischen den entstehenden 2n Gleichungen die n Größen z, $\frac{\partial}{x} z$, $\frac{\partial}{y} z$ .... weg, so bleiben n Gleichungen übrig, die nur noch x und y und die n Parameter der berührenden Fläche

enthalten, woraus also diese letzteren in x und y ausgedrückt werden können. Man wird hier abermals eine nöthig gewesene Abweichung von dem gewöhnlichen Vortrage bemerken.

Die Ebene hat 3 Parameter. Man darf also für sie nur bis zur ersten Ordnung der Ableitung gehen, denn wenn z. B. die Gleichung der berührten Fläche entwickelt gegeben wäre, so giebt dieses schon 3 Gleichungen $z = r$, $\frac{\partial}{x} z = \frac{\partial}{x} r$ und $\frac{\partial}{y} z = \frac{\partial}{y} r$, die zur Bestimmung der 3 Parameter der berührenden Ebene hinreichen. Die Gleichung der Kugel hat 4 Parameter. Geht man also bis zur ersten Ordnung, so bleibt noch ein Parameter unbestimmt, wozu man den Halbmesser wählen kann, so daß es unzählige Kugeln, deren Mittelpuncte alle in einer geraden Linie liegen, giebt, die mit der berührten Fläche alle einerlei berührende Ebene haben. Geht man hingegen bis zur 2ten Ordnung, so hat man 6 Bestimmungs-Gleichungen $z = r$, $\frac{\partial}{x} z = \frac{\partial}{x} r$, $\frac{\partial}{y} z = \frac{\partial}{y} r$, $\frac{\partial^2}{x^2} z = \frac{\partial^2}{x^2} r$, $\frac{\partial^2}{xy} z = \frac{\partial^2}{xy} r$ und $\frac{\partial^2}{y^2} z = \frac{\partial^2}{y^2} r$ für die 4 Parameter, denen allen mit

diesen 4 Parametern nicht genug gethan werden kann, so daß sich eine einzelne Berührungs-Kugel, nämlich eine solche, die unter allen Kugeln der Fläche am nächsten kommt, nicht allgemein angeben läßt. Eine Fläche, die durch Umdrehung eines Kegelschnitts oder eines Kreis-Abschnitts um seine Axe entsteht, ließe sich allgemein bestimmen, da ihre Gleichung 6 Parameter hat u. s. w.

V.

Die Untersuchung des Falles, wenn nicht Flächen, sondern Linien doppelter Krümmung von Flächen berührt werden sollen, schließt sich unmittelbar an die des vorigen an. Man stelle sich nämlich die Linie auf eine Fläche gezogen vor, so darf man, um sie analytisch auszudrücken, bloß in der Gleichung der Fläche z. B. y als von x abhängend betrachten, nämlich so, daß wenn z. B.

$$u = |xyz| = o$$

die Gleichung der Fläche wäre, z nicht sowohl von x und y zugleich, als nur von x allein abhängt, welches dasselbe ist, als wenn zu der Gleichung der Fläche $u = |xyz| = o$ noch eine zweite Gleichung

$$v = |xyz| = o$$

zwischen x, y und z hinzukäme, die dann be-

kanntlich beide zusammen eine Linie doppelter Krümmung ausdrücken. Die abgeleiteten Gleichungen von $u = o$ gehen dadurch in folgende über: $\frac{\partial}{x}(u) = o$, $\frac{\partial^2}{x^2}(u) = o$ u. s. w. oder auch

$$\frac{\partial}{x} u + \frac{\partial}{y} u \partial y = o$$

$$\frac{\partial^2}{x^2} u + 2 \frac{\partial^2}{xy} u \partial y + \frac{\partial^2}{y^2} u \partial y^2 + \frac{\partial}{y} u \partial^2 y = o \text{ ꝛc.}$$

wo nun y, ∂y, $\partial^2 y$ ... Größen von bestimmter Abhängigkeit von x sind. Nachdem man nun erstlich aus der Gleichung der berührenden Fläche $\alpha = |pqr| = o$, wie immer, nächst $p = x$,

$$q = y, \; r = z, \; \frac{\partial}{p} r = \frac{\partial}{x} z, \; \frac{\partial}{q} r = \frac{\partial}{y} z \ldots\ldots$$

gesetzt hat, welches die Bedingungen waren, unter welchen die Flächen sich berühren; so kann man zuerst so viel Parameter als möglich unmittelbar aus den einzelnen Gleichungen $\frac{\partial}{x} u = o$,

$\frac{\partial}{y} u = o$.,... nehmen, ganz als wäre noch von Berührung der Fläche, nicht von einer Linie die Rede, denn die Fläche, wenn sie die Fläche berührt, worin die Curve doppelter Krümmung sich befindet, wird um so mehr die Curve berühren, weil sie alle mögliche Curven berührt,

die in der Fläche durch den Berührungs-Punct gezogen werden können; sodann, wenn nun mehr einzelne Gleichungen in einer Ordnung vorkommen als Parameter zu bestimmen übrig sind, so tritt der Fall ein, daß in dieser Ordnung die Fläche nicht mehr die Fläche, worin die gegebene Curve sich befindet, sondern nur noch diese eine Curve durch den Berührungs-Punct berühren kann. In dieser Ordnung also tritt eine Abhängigkeit der Ordinaten ein, nämlich weil nicht mehr jede mögliche Curve in der Fläche, die durch den Berührungs-Punct geht, berührt werden kann, also die Unabhängigkeit der Ordinaten für diese Ordnung der Berührung aufhört; und zwar tritt diejenige Abhängigkeit ein, die der gegebenen Curve entspricht. Jetzt also erhalten ∂y, $\partial^2 y$ .... ihre bestimmten Werthe und die abgeleiteten Gleichungen müssen nun in der Form, wie z. B.

$$\frac{\partial^2}{x^2}(u) = \frac{\partial^2}{x^2} u + 2 \frac{\partial^2}{xy} u \partial y + \frac{\partial^2}{y^2} u \partial y^2 + \frac{\partial}{y} u \partial^2 y = 0$$

angewendet werden.

Eine Kugel z. B. konnte in der ersten Ordnung allgemein eine Fläche berühren, und ein Parameter blieb unbestimmt, nicht aber in der zweiten Ordnung, weil hier den 3 Gleichungen durch den einen Parameter nicht genug gethan

werden konnte. Verlangt man also, in der zweiten Ordnung, statt der Berührung der Fläche, nur diejenige einer Curve in ihr, so ist eine solche allerdings allgemein möglich, weil die Curve zur Bestimmung des einen Parameters nur eine einzelne Gleichung liefert, nämlich hier die eben als Beispiel angeführte $\frac{\partial^2}{x^2}(u) = 0$. Aus dieser Gleichung fällt noch erst das Glied $\frac{\partial}{y} u \partial^2 y$ weg, weil schon für die Berührung der ersten Ordnung allgemein $\frac{\partial}{y} u = 0$ war, also ist die Gleichung mit einem bestimmten ∂y, aus welcher der 4te Parameter zu nehmen ist:

$$\frac{\partial^2}{x^2} u + 2 \frac{\partial^2}{xy} u \partial y + \frac{\partial^2}{y^2} u \partial y^2 = 0.$$

Es kann auch eine Linie auf einer Fläche aus gegebenen Bedingungen der Berührung gesucht werden. Alsdann ist die Abhängigkeit der Größe y von x die gesuchte Größe. So findet man z. B. daß von den Curven doppelter Krümmung, die durch einen beliebigen Punct in einer Fläche gezogen werden können, diejenigen beiden, welche die größte und die kleinste Krümmung haben, sich unter rechten Winkeln schneiden u. s. w.

7.

Jetzt komme ich zunächst zu der Quadratur der Curven in der Ebene, und hier so wie bei allem Folgenden ist es, wo ich auch in den Principien der Anwendung abweichen werde. Ich glaube, daß durch die Ansicht, deren ich mich bedienen werde, der Gegenstand völlig anschaulich gemacht, also die letzte Schwierigkeit gehoben, und der Vortrag so strenge wird, wie ihn die alten Geometer in dergleichen Fällen zu verlangen pflegten. Ich will bloß meine Vorstellungen, ohne sie mit den sonstigen zu vergleichen, geben, da hier der Raum dazu zu beengt ist.

Fig. 2. Es sey AMN eine stetig gekrümmte Curve in der Ebene, $AP = x$, $PM = y = fx$, $PQ = k$, die Fläche $AMP = Fx$; so ist die Fläche $PMQN = k\partial Fx + \frac{k^2}{2}\partial^2 Fx \ldots$. Diese Fläche ist nun größer als ein Rectangel, das k zur Grundlinie und die kleinste der Ordinaten, die von PM bis QN liegen, zur Höhe hat, und kleiner als ein Rectangel von eben der Grundlinie, und von der Höhe der größten jener Ordinaten; also gleich einem Rectangel, das k zur Grundlinie und eine Höhe hat, die zwischen der größten und kleinsten Ordinate fällt. Aber die Linie krümmt sich von M nach N, also auch von der

größten bis zur kleinsten Ordinate, stetig, das heißt: ihre Ordinaten durchlaufen ohne Absatz alle Größen von der größten bis zur kleinsten, die zwischen beiden möglich sind. Dieserhalb muß sich unter ihnen nothwendig diejenige befinden, die der Höhe des Rectangels, das mit der Fläche PMNQ einerlei Größe hat, gleich ist. Also befindet sich eine solche Ordinate nothwendig zwischen PM und QN. Sie sey RS, und PS $= \varkappa$, so ist $\varkappa$ eine Größe, die, was auch k seyn mag, zwischen o und k liegt, also eine Größe, die nothwendig $= o$ ist, wenn $k = o$ ist. Nun ist die Ordinate RS $= f(x + \varkappa)$ $= fx + \varkappa \partial fx + \frac{\varkappa^2}{2} \partial^2 fx \ldots$, folglich ist PMQN

oder $k\partial Fx + \frac{k^2}{2} \partial^2 Fx \ldots = kfx + k\varkappa\partial fx$ $+ k \frac{\varkappa^2}{2} \partial^2 fx \ldots$ woraus, wenn man mit k dividirt, folgt:

$$\partial Fx + \frac{k}{2} \partial^2 Fx \ldots = fx + \varkappa\partial fx + \frac{\varkappa^2}{2} \partial^2 fx \ldots$$

Diese Gleichung findet statt für jedes beliebige k, also auch für $k = o$. Aber $\varkappa$ war nothwendig $= o$, wenn $k = o$ ist, also giebt die Gleichung, wenn man $k = o$ setzt .

$\partial Fx = fx$

welches der bekannte Satz ist.

Ich glaube, daß diese Deduction völlig strenge ist. Es ist bei ihr nicht, wie gewöhnlich, von verschwindenden Größen und ihrer Vergleichung, nicht von Quotienten verschwindender Größen, nicht von Grenzen die Rede. Es werden vielmehr nur die bleibenden Factoren verschwindender Größen erst allgemein gefunden, und dann der unabhängig veränderlichen Größe einer ihrer Werthe, nämlich der Werth o, beigelegt, der ihr mit allem dem Rechte zukommt, wie jeder andere Werth. Die ganze Kraft des Beweises liegt übrigens in dem Umstande, daß die Ordinate RS zwischen MP und NQ liegt, was auch k sey, und dieß, glaube ich, ist nach dem Obigen keiner Erinnerung unterworfen. Auch werden hier sehr deutlich die Fälle sichtbar, in welchen allein das Resultat, das der Werth ∂Fx von fx giebt, nicht auf die Fläche AMP paßt, nämlich, wenn die Stetigkeit der Krümmung zwischen M und N unterbrochen ist, z. B. durch Asymptoten, durch unmögliche Ordinaten und dergl. Diese Fälle correspondiren mit denjenigen, in welchen die Ableitungen in der Entwickelung von f(x + k) unendlich oder unmöglich sind, und also die Entwickelung unbestimmt bleibt. In diesen Fällen läßt

die Gleichung $Fx = \frac{1}{\partial} fx + Const.$ den Ausdruck der Fläche AMP unbestimmt.

8.

Ganz ähnliche Vorstellungen dienen zur Auflösung aller übrigen der vorigen ähnlichen, Aufgaben, zunächst zur Cubatur.

Fig. 3. Ich will hier, obgleich auch ohne das der Vortrag verständlich seyn würde, eine Figur zu Hülfe nehmen, um bei der Gelegenheit eine Art zu zeigen, wie nach meiner Meinung, Zeichnungen von körperlichen Räumen, die sonst in der Geometrie dem Anfänger so viele Schwierigkeiten zu machen pflegen, und auch wohl machen müssen, da perspectivische Zeichnungen eigentlich unmöglich früher als die Geometrie wirklich verstanden werden können, leicht verständlich zu machen sind. Das Mittel besteht darin, wie in der beschreibenden Geometrie, die Projection oder den Grundriß des Körpers zu zeichnen, aber nur auf einer Coordinaten-Ebene, welches in den mehrsten gewöhnlichen Fällen hinreichend ist. Thut man dazu ein zweites Mittel, die, senkrecht über einem Puncte im Grundriß, im körperlichen Raume liegenden Puncte, mit demselben Buchstaben,

der dem Puncte im Grundriß beigesetzt ist, zu bezeichnen, von jenem durch einen, und wenn es nöthig ist, zwei und mehrere Striche, je höher der Punct liegt, unterschieden; so können auf diese Weise die Figuren im Raume, wie es scheint, sehr bequem bezeichnet werden, und die Einbildungskraft hat es dabei sehr leicht.

Es sey also hier (Fig. 3.) der Inhalt eines Körpers ABCA′ zu finden. Es sey AP = x, PM = y, MM′ = z, PQ = k, RS = e, der Inhalt des Körpers RMPAR′M′P′A′ od. RPR′P′ = Fxy = u. Die Gleichung der Fläche ABC′A sey z = fxy, so wird der Inhalt des Körpers ALA′L′

$$= F(x+k, y+e) = u + k\frac{\partial}{x}u + \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2}{x^2}u \ldots.$$
$$+ e\frac{\partial}{y}u + ke\frac{\partial^2}{xy}u \ldots.$$
$$+ \frac{e^2}{2}\frac{\partial^2}{y^2}u \ldots.$$

der Inhalt des Körpers PNP′N′ = F(x+k, y)

$$- Fxy = k\frac{\partial}{x}u + \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2}{x^2}u \ldots.$$

der Inhalt des Körpers RTR′T′ = F(x, y+e)

$$- Fxy = e\frac{\partial}{y}u + \frac{e^2}{2}\frac{\partial^2}{y^2}u \ldots.$$

seyn; also, wenn man die beiden letzten nebst

AMA′M′ = u von dem ersten abzieht, der Inhalt des Körpers MLM′L′

$$= ke\frac{\partial^2}{xy}u + \frac{k^2e}{2}\frac{\partial^3}{x^2y}u \ldots = ke\left[\frac{\partial^2}{xy}u + \frac{k}{2}\frac{\partial^3}{x^2y}u \ldots\right]$$
$$+ \frac{ke^2}{2}\frac{\partial^3}{xy^2}u \ldots \qquad + \frac{e}{2}\frac{\partial^3}{xy^2}u \ldots$$

Nun ist dieser letzte Körper größer als ein Parallelepipedum, das die Fläche TLMN = ke zur Grundfläche, und die kleinste von den Ordinaten, die innerhalb MLM′L′ sich befinden, zur Höhe hat; und kleiner als ein ähnliches Parallelepipedum, das die größte der Ordinaten innerhalb LML′M′ zur Höhe hat, also gleich einem Parallelepipedum, das TLMN zur Grundfläche und eine Höhe hat, die zwischen der größten und kleinsten Ordinate über TLMN liegt. Aber die Fläche T′L′M′N′ krümmt sich stetig oder ohne Unterbrechung von der kleinsten nach der größten Ordinate hin, also befindet sich nothwendig über TLMN eine Ordinate, die der Höhe des Parallelepipedums gleich ist, welches mit dem Körper LML′M′ einerlei Inhalt hat. Ihre Coordinaten seyn x + κ und y + ε, so sind κ und ε Größen, die nothwendig zwischen o und k, und zwischen o und e liegen müssen, was auch k und e seyn mögen, die also = o sind, wenn k = o und e = o. Nun ist die Ordinate zu x + κ und y + ε =

$$f(x+\varkappa,\, y+\varepsilon) = z + \varkappa \frac{\partial}{x} z + \frac{\varkappa^2}{2} \frac{\partial^2}{x^2} z \ldots\ldots$$
$$+ \varepsilon \frac{\partial}{y} z + \varkappa\varepsilon \frac{\partial^2}{xy} z \ldots\ldots$$
$$+ \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2}{y^2} z \ldots\ldots$$

also läßt sich der Körper MLM'L' auch durch $ke f(x+\varkappa,\, y+\varepsilon)$ ausdrücken. Mithin ist

$$ke \left[\frac{\partial^2}{xy} u + \frac{k}{2} \frac{\partial^3}{x^2 y} u \ldots\ldots + \frac{e}{2} \frac{\partial^3}{xy^2} u \ldots\ldots \right] = ke \left[z + \varkappa \frac{\partial}{x} z \ldots\ldots + e \frac{\partial}{y} z \ldots\ldots \right]$$

woraus, wenn man mit ke dividirt, folgt

$$\frac{\partial^2}{xy} u + \frac{k}{2} \frac{\partial^3}{x^2 y} u \ldots\ldots + \frac{e}{2} \frac{\partial^3}{xy^2} u \ldots\ldots = z + k \frac{\partial}{x} z \ldots\ldots + e \frac{\partial}{y} z \ldots\ldots$$

Nun gebe man den Größen k und e den Werth o, der ihnen mit eben dem Recht wie irgend ein anderer Werth beigelegt werden kann, so erhält man, weil $\varkappa$ und ε Größen waren, die nothwendig mit k und e zugleich, o sind:

$$\frac{\partial^2}{xy} u = z$$

welches der bekannte Satz ist.

Es lassen sich darüber ähnliche Bemerkungen machen, wie bei der vorigen Aufgabe.

9.

Von der Rectification kommt zuerst

I.

die der Curve in der Ebene vor.

Fig. 4. Es sey AP = x, PM = y, fx = y die Gleichung der Curve, PQ = k, und das Curven-Stück MN in seiner ganzen Länge nur nach einer Seite concav oder convex, auch sey QN die größte oder kleinste, hier die größte unter den Ordinaten von M bis N. MD sey die geradlinige Tangente an M, BN diejenige an N.

Zuerst nun kann der Winkel GNB, den die Tangente an der größten Ordinate in N mit der Abcissen-Axe macht, wenn nämlich GN mit AP parallel ist, nicht kleiner als o seyn. Dieß läßt sich auf zweierlei Art beweisen.

Erste Art. Man nehme irgend eine Ordinate RS zwischen PM und QN an, und setze PR = $\varkappa$, so ist der Unterschied der Ordinaten QN und RS

$$= f(x+k) - f(x+\varkappa)$$

$$= fx + k\partial fx + \frac{k^2}{2}\partial^2 fx \ldots - fx - \varkappa\partial fx - \frac{\varkappa^2}{2}\partial^2 fx \ldots$$

$$= (k-\varkappa) + \frac{k^2-\varkappa^2}{2}\partial^2 y \ldots$$

Dieser Unterschied muß allemal seine positive Größe seyn, was oder wie klein auch $k - \varkappa$ seyn mag, weil angenommenermaßen QN die größte Ordinate ist. Es kann aber $k - \varkappa$ so klein seyn, daß $\partial y > \left[\frac{k^2 - \varkappa^2}{2} \partial^2 y + \frac{k^3 - \varkappa^3}{2 \cdot 3} \partial^3 y \ldots\right] : [k - \varkappa]$ oder daß das erste Glied $(k - \varkappa)\, \partial y$, größer ist als alle übrige zusammen genommen. Der Unterschied für jedes $k - \varkappa$, es sey so klein als man will, kann also nur dann immer eine positive Größe seyn, wenn es ∂y ist. Mithin muß die trigonometrische Tangente des Winkels GNB, die $= \partial y$ ist, nothwendig eine positive Größe, also der Winkel selbst > 0 seyn.

Zweite Art. Man nehme erstlich an: es folgen auf QN Ordinaten, die größer sind als QN z. B. UV > QN, so ist um so mehr Uv > QN, weil Uv > UV. Mithin ist vNH oder GNB > 0. Zweitens nehme man an, es folgen auf QN Ordinaten, die kleiner sind als QN, z. B. UV < QN, so kann GNB nur gleich 0 seyn, nicht größer oder kleiner. Denn gesetzt GNB könnte kleiner seyn als 0, so daß Nv unter NH fiele, so würde auch NB unter NG fallen können, weil, auch nach P zu, auf NQ kleinere Ordinaten folgen sollen. Dann aber wäre BNv nicht

eine gerade Linie, sondern es fänden in N zwei Tangenten statt, und es wäre hier der Fall einer Unterbrechung der Krümmung oder einer Spitze in N, die nicht statt finden soll. Eben so setze man, GNB könnte größer seyn als o, so daß Nv über NH fiele; so könnte wieder auch NB über NG fallen und BNv wäre wieder keine gerade Linie. Also kann nur GNB = o seyn. Die beiden Fälle, daß auf QN entweder größere oder kleinere Ordinaten folgen, sind aber nur möglich, folglich kann GNB nur > o oder = o seyn, mithin nicht < o.

Nun ist weiter der Bogen MN allemal kleiner als die Tangente MD an der kleinsten Ordinate MP, und größer als diejenige BN an der größesten QN, welches wieder auf zweierlei Art bewiesen werden kann.

Erste Art. Bei dieser beruht der Beweis auf den Satz, daß iede Linie, die eine andere in ihrer ganzen Länge nach einer und derselben Seite convexe Linie, mit welcher sie zwei Puncte gemein hat, umschließt, länger ist als die umschlossene Linie. Von diesem Satze also ist zuerst der Beweis nöthig. Es giebt folgenden.

Wenn (Fig. 5.) nicht die umschlossene Linie AMB selbst die kürzeste unter allen Linien ist, von

welchen AMB an der convexen Seite umschlossen wird, wie man behauptet, so sey es unter diesen umschließenden Linien irgend eine andere, z. B. ADB. Welche aber auch die Linie ADB seyn mag, es läßt sich, indem man eine gerade Linie wie PQ zieht, die AMB nicht überschreitet, eine Linie APQB angeben, die, während sie AMB ebenfalls noch umschließt, kürzer ist als ADB, weil PQ < PDQ. Also ist es unmöglich eine Linie ADB anzugeben, die, während sie AMB umschließt, die kürzeste ist von allen den Linien, welche AMB umschließen; das heißt: die kürzeste von den Linien, die AMB umschließen, liegt an der convexen Seite von AMB nicht. An der andern Seite aber soll sie nicht liegen, folglich liegt sie in AMB selbst, und folglich ist AMB kürzer als jede Linie, von der sie an der convexen Seite umschlossen wird.

Der Beweis ist derjenige den Legendre (Elemens de geometrie liv. IV. propos. IX. cinq. edit. page 116.) wie es scheint im Sinne gehabt, aber nicht ganz deutlich ausgesprochen hat.

Dieser Beweis setzt noch den Satz voraus, daß die gerade Linie die kürzeste sey zwischen zwei Puncten, weil man behauptet hat, daß, welche

auch die Linie PDQ seyn mag, PQ < PDQ ist. Diejenigen Geometer, die, wie Legendre, definiren: der kürzeste Weg zwischen zwei Puncten sey die gerade Linie (Elem. pag. 1. def. III.) können eines Beweises dieses Satzes überhoben seyn. Diejenigen hingegen, die, wie Euclides, jene Eigenschaft der geraden Linie nicht als Grundsatz annehmen, erwarten den Beweis.

Ich gebe folgenden.

Man setze, die gerade Linie AB (Fig. 6.) sey nicht die kürzeste zwischen den beiden Puncten A und B, sondern vielmehr irgend eine andere Linie, z. B. die, in ihrer ganzen Länge gegen AB concave, Linie AMB, so daß AB > AMB ist; so ziehe man nach einem willkührlichen Puncte Q der in AMB liegt, die geraden Linien AQ und BQ, und es wird strenge bewiesen z. B. nach Euclides (Elemente 1. Buch 20. Satz), daß AQ + BQ > AB ist. Die Linie AQB überträfe also die AMB um noch mehr als AB. Man ziehe nach einem zweiten Puncte P in AMB die geraden Linien QP und BP, so ist wieder QP + BP > QB, also überträfe AQPB die AMB wiederum mehr als AQB. Je mehr man der Linie AQPB Ecken giebt, die in AMB liegen, um so mehr

überträfe sie also AMB. Nun wird es unter denen, an AMB sich anschließenden, Linien wie AQPB, die AMB übertreffen, nothwendig eine geben müssen, die AMB am meisten übertrifft. Sie sey ARQPB. Welche aber auch diese Linie ARQPB seyn mag, es läßt sich, indem man ihr neue Ecken giebt, eine an AMB sich anschließende Linie ziehen, die noch länger ist. Also läge die Linie, die AMB am meisten übertrifft, nicht zwischen AMB und AB, mithin könnte sie nur in AMB selbst liegen; denn auch in AB liegt sie nicht, weil es längere convexe Linien innerhalb AMB giebt als AB. Dieses aber ist unmöglich. Denn die Linie AMB ist sich selbst gleich, und diejenige, die am meisten sie übertrifft, kann nicht sie selbst seyn; folglich ist es unmöglich, daß die gerade Linie AB länger sey als irgend eine andere convexe Linie zwischen A und B, mithin ist sie unter allen convexen Linien zwischen A und B die kürzeste.

Fig. 7. Wäre nun ferner noch die Linie AMPQB abwechselnd concav und convex, also gestaltet wie man will, so wird man von einem Wendungs-Punct zum andern gerade Linien ziehen, z. B. AP, PQ, QB, und wie oben beweisen, daß AP < AMP, PQ < PRQ, QB

$< QSB$, woraus folgt, daß um so mehr $AB < AMRSB$.

Nachdem bewiesen worden, daß eine Linie, die eine andere nach einerlei Seite gekrümmte Linie, mit der sie 2 Puncte gemein hat, an der convexen Seite umschließt, länger ist als diese, folgt das Uebrige von der Behauptung: daß die Länge des Bogens MN (Fig. 4.) zwischen der der beiden Tangenten MD und BN liege, also.

Es ist nämlich in dem Dreieck CND der Winkel $CND > \varrho$ (ein rechter Winkel heiße ϱ) weil $CNG > o$ war; also ferner $CDN < \varrho$, also ist $CND > CDN$ und folglich von den gegenüberstehenden Seiten, $CD > CN$, mithin $MC + CD$ oder

$$MD > MC + CN.$$

desgleichen ist in dem Dreieck BMN der Winkel $NBM > \varrho$, weil $NBM = BND$; also $NMB < \varrho$, also ist $NBM > NMB$, mithin ist von den gegenüberstehenden Seiten

$$BN < MN$$

Nun ist die gerade Linie MN nach dem obigen Satze kürzer als der Bogen MN, und die umschließende Linie $MC + CN$ länger als dieser Bo-

gen. Es ist also, weil BN $<$ MN und MD $>$ MC + CN war, noch um so mehr die Tangente BN an N kürzer und die Tangente MD an M länger als der Bogen MN.

Zweite Art. Zu beweisen ist, daß, wenn (Fig. 4.) GNB $> o$ oder BNQ $< \varrho$ und der Bogen MN nur nach einer Seite concav ist, die Tangente MD $>$ Bogen MN, und die Tangente NB $<$ Bogen MN ist; denn daß die Bedingung BNQ $< \varrho$ aus derjenigen, daß NQ die größte Ordinate seyn soll, entspringe, ist schon vorhin bewiesen worden.

Für das erste setze man, es sey nicht BN $<$ MN, sondern $=$ oder $>$ Bogen MN. Man ziehe die Sehne MN, so ist NMB $<$ NBG $< \varrho$, also da NBM $> \varrho$, NBM $>$ NMB und folglich von den gegenüberstehenden Seiten MN $>$ NB; also wäre MN $>$ Bogen MN. Daß dieses unmöglich sey, beweiset man wie oben, nämlich, daß die gerade Linie MN nicht länger seyn kann, als der Bogen MN. Mithin ist auch BN nicht $=$ oder $>$ Bogen MN, sondern kleiner.

Für das zweite setze man, es sey nicht MD $>$ Bogen MN, sondern MD $=$ oder $<$ Bogen MN.

Man ziehe die Tangente BN an N, so findet man, daß $MCN < MD$, weil $CN < CD$, indem auf eine ähnliche Weise wie vorhin, $CND > CDN$ ist. Man ziehe eine neue berührende Linie ZW, so ist $ZW < ZCW$, also MZWN noch um so mehr kleiner als MD. Je mehr man aber der Linie MZWN Ecken giebt, je kürzer ist sie, und folglich je mehr würde sie von dem Bogen MN übertroffen werden. Nun muß es unter jenen Linien, die sich an den Bogen anschließen, nothwendig eine geben, die von ihm am meisten übertroffen wird. Sie sey MZWN. Welche aber auch MZWN seyn mag, es wird mittelst neuer Ecken eine andere an MN sich anschließende Linie gezogen werden können, die noch kürzer ist. Also läge die Linie, die am meisten von dem Bogen übertroffen wird, nicht außer dem Bogen, folglich läge sie in ihm selbst. Dieses aber ist unmöglich, weil der Bogen sich nicht selbst übertreffen kann; mithin ist es auch unmöglich, daß MD = oder < Bogen MN sey, folglich muß nothwendig MD > Bogen MN seyn.

Nun folgt ferner der Satz, daß der Tangenten-Winkel von M nach N stetig abnehme.

Die Concavität nach PQ zu besteht nämlich darin, daß keine Tangente zwischen M und N den

Bogen MN außer dem Berührungs-Punct treffen soll. Also muß der nach jedem Berührungs-Punct folgende Bogen, mithin auch jede folgende Tangente ganz auf derselben Seite nach AQ zu bleiben; mithin muß die Lage der Tangente der Richtung der Abcissen-Axe stetig sich nähern.

Es werden weiter die Stücken der Tangenten, wie MD und BN, welche von den Ordinaten PM und QN abgeschnitten werden, nach M und N zu stetig abnehmen.

Denn man ziehe mit allen diesen Stücken, z. B. aus M, parallele Linien, wie MT, so sind diese Linien schräge Linien aus einem Puncte, die, stetig zunehmende, Winkel mit QN machen; also nehmen diese Linien stetig ab.

Hieraus folgt endlich, daß es zwischen M und N nothwendig einen Punct in der Curve geben muß, für welchen das von den Ordinaten MP und NQ abgeschnittene Stück der Tangente der Länge des Bogens MN gleich ist. Der Punct sey S und PR = $\varkappa$, so ist die trigonometrische Tangente des Tangenten-Winkels für diesen Punct $= \partial f(x + \varkappa)$, also die Länge des, von den Ordinaten PM und QN abgeschnittenen, Stücks dieser

Tangente $= k \sqrt{(1 + \partial f(x + \varkappa)^2)}$ wo $\varkappa$ eine Größe ist die, was auch k seyn mag, zwischen o und $\varkappa$ liegt. Nun sey die Länge des Bogens $AM = \varphi x$, so ist $MN = \varphi(x + k) - \varphi x$ $= k\partial\varphi x + \frac{k^2}{2} \partial^2 \varphi x \ldots\ldots$ also ist

$$k\partial\varphi x + \frac{k^2}{2}\partial^2\varphi x \ldots\ldots = k\sqrt{[1 + \partial f(x + \varkappa)^2]}$$

oder, wenn man mit k dividirt:

$$\partial\varphi x + \frac{k}{2}\partial^2\varphi x \ldots\ldots = \sqrt{[1 + \partial f(x + \varkappa)^2]}$$

Man lege der Größe k den Werth o bei, der ihr mit eben dem Recht zukömmt, wie irgend ein anderer, so ist auch $\varkappa = o$ und folglich

$$\partial\varphi x = \sqrt{(1 + \partial f x^2)}$$

welches der bekannte Satz ist.

Obgleich man angenommen hat, daß QN die größte oder kleinste unter den Ordinaten von P bis Q ist, so paßt die Formel dennoch für jeden andern, nur nicht unterbrochenen, Bogen; denn man kann k immer klein genug annehmen, daß Q nicht über ein Maximum oder Minimum der Ordinate hinaus fällt. Von dem Maximo und Minimo, oder dem Wendungs-Punct, oder dergl. fängt aber die Gültigkeit des Ausdrucks wieder von Neuem an.

Man bemerkt leicht die Lücken des gewöhnlichen Vortrages, welche hier auszufüllen versucht worden sind. Es finden dergleichen statt, selbst wenn man die beiden Sätze, daß jede umschließende Linie länger sey als die concave umschlossene, und daß die gerade Linie die kürzeste zwischen zwei Puncten sey, als bewiesen voraus setzt. Die Bedingung, daß QN die größte oder kleinste unter den Ordinaten von P bis Q sey, die Lagrange übergeht (Theorie des fonct. 2. edit. p. 218. art. 29.) ist unerläßlich. Ohne sie finden alle übrige Behauptungen keineswegs statt.

II.

Die Rectification der krummen Linien doppelter Krümmung beruht auf der Rectification der Curven in der Ebene, ohne die letztere zu wiederholen.

Fig. 8. Es sey nämlich R′M′N′ eine Linie doppelter Krümmung und RMN ihre Projection auf die Ebene der x, y, so ist nach Obigem, wenn RNM = φx heißt, der Bogen

MN oder $\partial\varphi x = \sqrt{(1 + \partial f x^2)} = \sqrt{(1 + \partial y^2)}$

Nun stelle man sich die Cylinder-Fläche, die man über RMN annehmen kann, und in welcher die

Curve doppelter Krümmung R′M′N′ liegt, in eine Ebene ausgedehnt vor; so ist die Curve R′M′N′ eine krumme Linie in dieser Ebene, deren Abcissen die Bogen φx der Projection RMN von R an, die Ordinaten z sind; also ist ein Bogen dieser Curve, und zwar derjenige M′N′, dem Obigen zufolge, weil die Ableitung der Abcisse, die von x, = 1 war, jetzt $\partial\varphi x$ ist:

$$= \sqrt{(\partial\varphi x^2 + \partial z^2)}$$

Es war aber $\partial\varphi x = \sqrt{(1 + \partial y^2)}$, oder $\partial\varphi x^2 = 1 + \partial y^2$; also ist

der Bogen $M'N' = \sqrt{(1 + \partial y^2 + \partial z^2)}$

welches der bekannte Satz ist.

III.

Bei der Rectification der Flächen wird es darauf ankommen zu beweisen, daß, wenn T′L′M′N′ (Fig. 3.) ein nur nach derselben Seite concaves Stück der Fläche ist, und es kein Maximum oder Minimum unter den Ordinaten innerhalb TLMN giebt, daß alsdann innerhalb TLMN nothwendig eine Ordinate liegt, für welche der Theil der berührenden Ebene der über TLMN sich befindet, gleich dem Flächen-Stück T′L′M′N′ ist. Dieß wird durch ein ähnliches Raisonnement

geschehen, wie bei dem ähnlichen Satze der Rectification der Curven in der Ebene, das aber hier auszuführen der Raum nicht erlaubt. Wenn nun der Satz bewiesen worden; so sey dasjenige x, welches der erwähnten Ordinate z entspricht $= x + \varkappa$ und das dazu gehörige y, $= y + \varepsilon$, so werden $\varkappa$ und ε Größen seyn, die, was auch k und e seyn mögen, zwischen o und k und o und e enthalten sind. Nun findet man, daß der Theil einer beliebigen berührenden Ebene, dessen Projection TLMN = ke ist, $= ke \sqrt{(1 + \frac{\partial}{x} z^2 + \frac{\partial}{y} z^2)}$ sey. Für diejenige berührende Ebene, für welche dieser Theil dem Flächen-Stück über TLMN gleich seyn soll, war aber $z = f(x + \varkappa, y + \varepsilon)$; also ist das Flächenstück über TLMN,

$$= ke \sqrt{\left[1 + \frac{\partial}{x} f(x + \varkappa, y + \varepsilon)^2 + \frac{\partial}{y} f(x + \varkappa, y + \varepsilon)^2\right]}$$

Man bezeichne die Fläche vom Anfang der Coordinaten an, da solche von x und y abhangen wird, durch

$$\varphi xy = v$$

so kann das Flächen-Stück T′L′M′N′ auch durch

$$\Delta\varphi(x+\varkappa, y+\varepsilon) - \Delta\varphi(x+\varkappa, y)$$
$$- \Delta\varphi(x, y+\varepsilon)$$

ausgedrückt werden, welches

$$ke\left(\frac{\partial^2}{xy}\varphi xy + \frac{k}{2}\frac{\partial^3}{x^2y}\varphi xy \ldots\right)$$
$$+\frac{e}{2}\frac{\partial^3}{xy^2}\varphi xy \ldots$$

ausmacht. Also ist nunmehr

$$ke\sqrt{\left[1+\frac{\partial}{x}f(x+\varkappa, y+\varepsilon)^2+\frac{\partial}{y}f(x+\varkappa, y+\varepsilon)^2\right]}$$
$$= ke\left[\frac{\partial^2}{xy}\varphi xy + \frac{k}{2}\frac{\partial^3}{x^2y}\varphi xy \ldots\right]$$
$$+\frac{e}{2}\frac{\partial^3}{xy^2}\varphi xy \ldots$$

Dividirt man diese Gleichung durch ke und setzt k und e = o, welches, weil $\varkappa$ und ε, für jede Größe von k und e, zwischen o und k und o und e liegen, auch $\varkappa$ und ε = o erfordert, so erhält man $\frac{\partial^2}{xy}v = \sqrt{\left(1+\frac{\partial}{x}fxy^2+\frac{\partial}{y}fxy^2\right)}$,

oder auch

$$\frac{\partial^2}{xy}v = \sqrt{\left[1+\frac{\partial}{x}z^2+\frac{\partial}{y}z^2\right]}$$

welches der bekannte Ausdruck ist.

Man sieht, daß man bei dieser Methode der Rectification: eine Ordinate aufzusuchen, für

welche das geradelinige Tangentenstück, oder die berührende Ebene zwischen den Ordinaten, der Curve oder dem Flächenstück zwischen denselben Ordinaten gleich ist, auch noch eine andere als ebene oder geradlinige Tangente zur Vergleichung wählen könnte, z. B. einen Kreis oder eine Kugel-Fläche, etwa den Berührungs-Kreis, oder die Berührungs-Kugel u. dergl., wie es vielleicht für diesen oder jenen Fall leichter seyn könnte.

Ich glaube bei Gelegenheit dieser Anwendungen der Rechnung mit veränderlichen Größen, auf die Deutlichkeit und Bestimmtheit aufmerksam machen zu dürfen, welche die, in meiner oben angeführten Schrift, statt der gewöhnlichen offenbar mangelhaften, vorgeschlagenen und hier gebrauchten, Zeichen und Benennungen gewähren. Die Vortheile derselben sind, besonders in den Fällen, wo mehr als eine unabhängig veränderliche Größe, oder, wie man sonst sagt, partielle Differentiale und Integrale vorkommen, kaum zu verkennen. Ihre Vortheile sind eben so gewiß als eine consequente Wahl der Zeichen nothwendig ist, wenn der Algorithmus der Rechnung nicht wie bei den gewöhnlichen Zeichen gestört werden soll.

10.

Von den Anwendungen auf die Mechanik will ich nur kürzlich diejenige auf die veränderte Bewegung eines Puncts, oder richtiger, der unveränderlichen Massen-Einheit, berühren.

Die bei einer solchen Bewegung vorkommenden Größen sind: Zeit, durchlaufener Raum, Geschwindigkeit, die ein aus den beiden zusammengesetzter Begriff ist, und Kraft. Die Zeit werde zur unabhängig veränderlichen Größe genommen, so sind die drei andern, Größen die von ihr abhängen.

Die Zeit werde durch t
der durchlaufene Raum durch u
die Geschwindigkeit durch v
die Kraft durch p

bezeichnet. Die Einheiten dieser 4 Größen sind:

von der Zeit, die Zeit-Secunde;
von dem Raume, die Maaß-Einheit;
von der Geschwindigkeit, die beiden vorigen Einheiten;
von der Kraft, die Schwere.

Von diesen Einheiten sind also die Größen t, u, v, p, Zahlen. Die Geschwindigkeit ist die Zahl

der Maaß-Einheiten, welche in der Zeit-Secunde durchlaufen werden würden, wenn die Bewegung unverändert wäre. Da die 3 Größen u, v, p von der Größe t abhängen sollen, so sey

$$u = Ft$$
$$v = ft$$
$$p = \varphi t.$$

I.

Nun habe ein Körper, dessen Masse unveränderlich und die Einheit der Massen ist, also hier nicht berücksichtigt werden darf, irgend eine Zeit t hindurch, entweder von der Ruhe an oder schon mit Geschwindigkeit anfangend, mit veränderlicher Bewegung sich fort bewegt, und am Ende der Zeit t die Geschwindigkeit v erlangt. Es verfließe nach der Zeit t noch die Zeit k, so wird auch während dieser letzten Zeit die Geschwindigkeit sich verändern, und folglich am Ende der Zeit t + k entweder größer oder kleiner, z. B. größer seyn als am Ende der Zeit t. Man nehme, außer der allgemeinen Bedingung, daß die Veränderung der Geschwindigkeit nicht sprungweise, sondern stetig geschehe, einen solchen Zeitraum k nach t an, in welchem die Geschwindig-

keit nur zu= oder abnimmt, hier zunimmt, welches allemal möglich seyn wird, weil man dazu nur k klein genug annehmen darf; so wird die Geschwindigkeit $v + \Delta v$ nach Verlauf der Zeit k größer seyn als am Anfange, und es ist offenbar, daß der Körper, wenn er mit der anfänglichen Geschwindigkeit v, ohne daß dieselbe während der k Secunden weiter verändert worden wäre, sich fortbewegt hätte, einen kleinern Raum Δu durchlaufen haben würde, als wirklich geschehen ist, und einen größern Raum, wenn die Geschwindigkeit $v + \Delta v$, die am Ende statt findet, während des ganzen Zeitraums statt gefunden hätte. Nun soll angenommenermaßen die Geschwindigkeit nur stetig sich verändern; sie soll also alle mögliche Größen durchlaufen, die zwischen v und $v + \Delta v$ liegen. In irgend einem Augenblick zwischen den Zeit=Puncten t und $t + k$ wird sie also nothwendig gerade so groß seyn müssen, daß der Körper, wenn er mit ihr durch die Zeit k unverändert sich fortbewegte, genau denselben Raum Δu durchlaufen würde, den er wirklich durchläuft. Man nenne die Zeit, um welche dieser Moment nach t fällt, $\varkappa$, so ist $\varkappa$ eine Größe, die nothwendig zwischen o und k liegt. Nun ist die Geschwindigkeit nach der Zeit $t + \varkappa$, weil $v = ft$ seyn sollte, $= ft + \varkappa \partial ft$

$+\frac{\varkappa^2}{2}\partial^2 ft \ldots$, also der Raum, den der Körper mit ihr die Zeit k hindurch gleichförmig durchlaufen würde, $= k(ft + \varkappa\partial ft + \frac{\varkappa^2}{2}\partial^2 ft \ldots\ldots)$. Dieser Raum soll angenommenermaßen dem Raume $\Delta u = k\partial Ft + \frac{\varkappa^2}{2}\partial^2 Ft \ldots$ gleich seyn, also ist

$$k(ft + \varkappa\partial ft + \frac{\varkappa^2}{2}\partial^2 ft \ldots\ldots) = k\partial Ft + \frac{k^2}{2}\partial^2 Ft \ldots$$

oder wenn man mit k dividirt

$$ft + \varkappa\partial ft + \frac{\varkappa^2}{2}\partial^2 ft \ldots\ldots = \partial Ft + \frac{k}{2}\partial^2 Ft \ldots\ldots$$

Nun ist k eine völlig willkührliche Größe, deren Werth die Statthaftigkeit der Gleichung nicht aufhebt, er sey welcher er wolle, der also auch mit eben dem Recht $= 0$ als alles Andere seyn kann, $\varkappa$ hingegen war eine Größe, die, was auch k seyn mag, zwischen 0 und k fällt. Macht man also k wirklich $= 0$, in welchem Falle also auch $\varkappa = 0$ gesetzt werden muß, so kommt

$ft = \partial Ft$ oder

$v = \partial u$

welches der bekannte Satz ist.

II.

Die Wirkung einer Kraft auf einen Körper ist die Geschwindigkeit, die sie ihm in einer gewissen Zeit ertheilt. Gleiche Kräfte auf gleiche Massen wirkend bringen in gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeiten hervor, also bringt die m fache Kraft in gleichen Zeiten die m fache Geschwindigkeit, die einfache Kraft in der m fachen Zeit ebenfalls die m fache Geschwindigkeit hervor. Nun treibe irgend eine Kraft p, die, wie man will, veränderlich ist, und die auf irgend eine Weise von der Zeit t, welche vom Anfange der Bewegung an verfließt, abhängt, so daß wie oben $p = \varphi t$ gesetzt werden kann, die Massen-Einheit. Die Geschwindigkeit, die sie ihr nach Verlauf der Zeit t beigebracht haben wird, wird ebenfalls von der Zeit abhängen, und wie oben $= ft$ gesetzt werden können. Es verfließe nach der Zeit t noch eine Zeit k, so wird die Kraft nach der Zeit $t + k$, $= \varphi(t + k) = p + \Delta p$ und die Geschwindigkeit nach der Zeit $t + k$ $= f(t + k) = v + \Delta v$ seyn. Nun wähle man

einen Zeitraum k, in welchem die Kraft p, außer der allgemeinen Bedingung, daß sie nicht sprungweise, sondern nur stetig sich verändere, nur zu oder abnimmt, z. B. hier zunimmt, welches allemal angehen wird, weil man zu dem Ende k nur klein genug annehmen darf; so ist klar, daß, wenn die Kraft durch den ganzen Zeitraum k sich nicht weiter veränderte, sondern $= p$ bliebe, die Zunahme der Geschwindigkeit Δv, die der Körper durch sie am Ende der Zeit t erhält, kleiner seyn würde, als diejenige, die er wirklich erhalten hat, und größer, wenn die Kraft durch den ganzen Zeitraum k schon vom Anfange an so groß gewesen wäre, als sie am Ende des Zeitraums ist, nemlich $= p + \Delta p$. Da nun die Kraft nur stetig sich verändern soll, also während der Zeit k alle mögliche Größen zwischen p und $p + \Delta p$ durchläuft, so ist es klar, daß es innerhalb der Zeit k, also zwischen t und $t + k$ nothwendig irgend einen Moment geben muß, in welchem die Kraft genau so groß ist, daß, wenn sie vom Anfange des Zeitraums k an, durch diesen Zeitraum hindurch, unverändert fortgewirkt hätte, die Zunahme der Geschwindigkeit Δv genau so groß geworden seyn würde, als sie es wirklich ist. Man nenne die Entfernung dieses Zeitraums vom Anfange der

Zeit k, $= \varkappa$, so ist $\varkappa$ eine Größe, die nothwendig zwischen o und k liegen muß. Nun ist die Kraft nach Verlauf der Zeit $t + \varkappa$, $= p + \Delta' p = \varphi t + \varkappa \partial \varphi t + \frac{\varkappa^2}{2} \partial^2 \varphi t \ldots$. Man setze die Geschwindigkeit, welche die Einheit der Kräfte, die Schwere, in der Zeit-Einheit hervorbringt, $= \alpha$; so wird die Geschwindigkeit, welche die Kraft $p + \Delta' p$ in der Zeit-Einheit hervorgebracht hat, $= \alpha(p + \Delta' p)$ und folglich diejenige, die sie in der Zeit k hervorbringt, $= \alpha k\,(p + \Delta' p)$ seyn. Diese Zunahme der Geschwindigkeit soll nun angenommenermaßen derjenigen gleich seyn, die der Körper wirklich bei seiner veränderten Bewegung erfährt, und welche $= \Delta p$ ist; also ist

$$\alpha k\,(p + \Delta' p) = \Delta v$$

oder

$$\alpha k\,\left(\varphi t + \varkappa \partial \varphi t + \frac{\varkappa^2}{2} \partial^2 \varphi t \ldots\right) = k \partial ft + \frac{k^2}{2} \partial^2 ft \ldots$$

oder

$$\alpha\,\left(\varphi t + \varkappa \partial \varphi t + \frac{\varkappa^2}{2} \partial^2 \varphi t \ldots\right) = \partial ft + \frac{k}{2} \partial^2 ft \ldots$$

Legt man nun der Größe k den Werth o bei, der

ihr aus dem obigen Grunde mit eben dem Recht zukommt wie jeder andere, so muß man auch $\varkappa = 0$ setzen, weil $\varkappa$ für jeden Werth von k zwischen 0 und $\varkappa$ liegt. Man erhält also

$$\alpha \varphi t = \partial s t \text{ oder}$$

$$\alpha p = \partial v$$

Die Wirkung von der Einheit der Kräfte, von der Schwere, wie man sie am leichtesten beobachten kann, besteht darin, daß sie einen Körper in einer Zeit-Secunde, von der Ruhe an, durch $15\frac{5}{8}$ rheinländische Fuß $= g$ treibt. Nun ist die Schwere eine unveränderliche Kraft und bringt also in gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeiten hervor, also ist $v = \alpha t$. Oben in (I.) war $\partial u = v$, also ist für die Schwere $\partial u = \alpha t$, welches $u = \frac{1}{\partial} \alpha t = \frac{1}{2} \alpha t^2 + \text{Const.}$, und da $u = 0$ für $t = 0$ ist, $u = \frac{1}{2} \alpha t^2$ giebt. Nun ist für $t = 1$, $u = g$, also ist $g = \frac{1}{2} \alpha$, und folglich $\alpha = 2g$. Also ist die obige allgemeine Formel

$$\partial v = 2gp$$

welches der bekannte Satz ist. Auch hat man, da $v = \partial u$ war,

$$\partial^2 u = 2gp$$

Für die Schwere, wo $p = 1$ ist, geben diese Formeln unmittelbar $v = \frac{t}{\partial} 2g = 2gt + \text{Const.}$

und $u = \frac{t}{\partial} v = \frac{t}{\partial} 2gt = gt^2 + \text{Const.}$

Ich glaube, daß auch in der Mechanik diese Art der Anwendung des Calculs so klare Vorstellungen gewährt, als nur möglich ist.

II.

Die allgemeine Regel für die Anwendung des Calculs, in Fällen, wo die Zurückleitungs-Rechnung zur Anwendung kommt, so wie sich dieselbe aus den hier ausgeführten Beispielen abnehmen läßt, ist folgende:

Wenn eine Größe, die von einer oder mehrern veränderlichen Größen abhängt, z. B. die von einer veränderlichen Größe x abhängende Größe Fx verlangt wird, so nehme man aus der Figur oder aus dem Gegenstande diejenige abhängige Größe fx, welche die Eigenschaft hat, daß sie für irgend einen Werth $x + \varkappa$ von x der, was auch k seyn mag, zwischen x und $x + k$ bleibt mit k

multiplicirt, eine Größe giebt, die der Differenz ΔFx von Fx gleich ist, also die Eigenschaft hat, daß

$$k\,f(x + \varkappa) = \Delta Fx$$

so ist völlig allgemein und strenge

$$fx = \partial Fx.$$

Denn es ist

$$k(fx + \varkappa\partial fx + \frac{\varkappa^2}{2}\,\partial^2 fx \ldots\ldots) = k\partial Fx$$

$$+ \frac{k^2}{2}\,\partial^2 Fx$$

oder

$$fx + \varkappa\partial fx + \frac{\varkappa^2}{2}\,\partial^2 fx \ \ldots\ldots = \partial Fx$$

$$+ \frac{k}{2}\,\partial^2 Fx \ldots$$

also für $k = 0$, wobei auch $\varkappa = 0$ ist

$$fx = \partial Fx$$

Aus ∂Fx mag man dann durch die Zurückleitung das verlangte Fx finden.

Diese Regel ist für die Anwendung des Calculs eine jedesmal passende bestimmte Vor-

schrift, und die Anwendung scheint dadurch so leicht zu werden, als selbst bei der ältesten Art der Weglassung der unendlichkleinen Größen. Bei der Quadratur ist die Größe fx, die die Beschaffenheit hat, welche die Regel verlangt, die Ordinate; bei der Rectification von Curven in der Ebene ist sie die trigonometrische Secante des Tangentenwinkels; bei der veränderten Bewegung ist sie, für den durchlaufenen Raum, die Geschwindigkeit, für die Geschwindigkeit, die Kraft multiplicirt mit 2g u. s. w.

12.

Man kann sich, nachdem man den Lagrangeschen Satz, daß z. B. in der Entwickelung von f(x + k) die Grenzen, zwischen welchen die Summe aller, nach einem beliebigen, z. B. nach dem mten Gliede, noch übrigen Glieder liegt, folgende sind

$$fx + k\partial fx \ldots\ldots + \frac{k^m}{2.3\ldots m}\partial^m fx$$

und

$$fx + k\partial fx \ldots\ldots + \frac{k^m}{2.3\ldots m}\partial f(x + k)$$

für eine und mehr unabhängig veränderliche Größen bewiesen hat, auch dieses endlichen Grenzen-Ausdrucks, z. B. statt einer Reihe von unbestimmter Glieder-Zahl für f(x + k), des Ausdrucks von bestimmter Glieder-Zahl

$$fx + k\partial fx \ldots\ldots + \frac{k^m}{2.3\ldots m}\,\partial^m f\,{}^{x}_{x+k}$$

der, wenn man z. B. nur das erste Glied der Entwickelung nöthig hat, sehr kurz

$$fx + k\partial f\,{}^{x}_{x+k}$$

ist, bedienen, wodurch der Vortrag noch übersichtlicher wird. Ich habe das aber deßhalb oben nicht gethan, weil der Grenzen-Ausdruck nicht unerläßlich nöthig ist, sondern der Beweis auch ohne ihn eben so strenge bleibt, indem gar kein Zweifel ist, daß alle Glieder einer Reihe, von welchen man versichert ist, daß sie alle ohne Ausnahme Potenzen von k von ganzen positiven Exponenten zu Factoren haben, verschwinden, wenn k = o ist und eines Mehreren bedürfen die Anwendungen nicht.

Ich glaube, daß ein Lehrbuch, welches der obigen Ansichten für die Anwendung des Calculs auf Geometrie und Mechanik sich bediente, mit der vollkommensten Strenge die größte Einfachheit und Leichtigkeit verbinden würde.

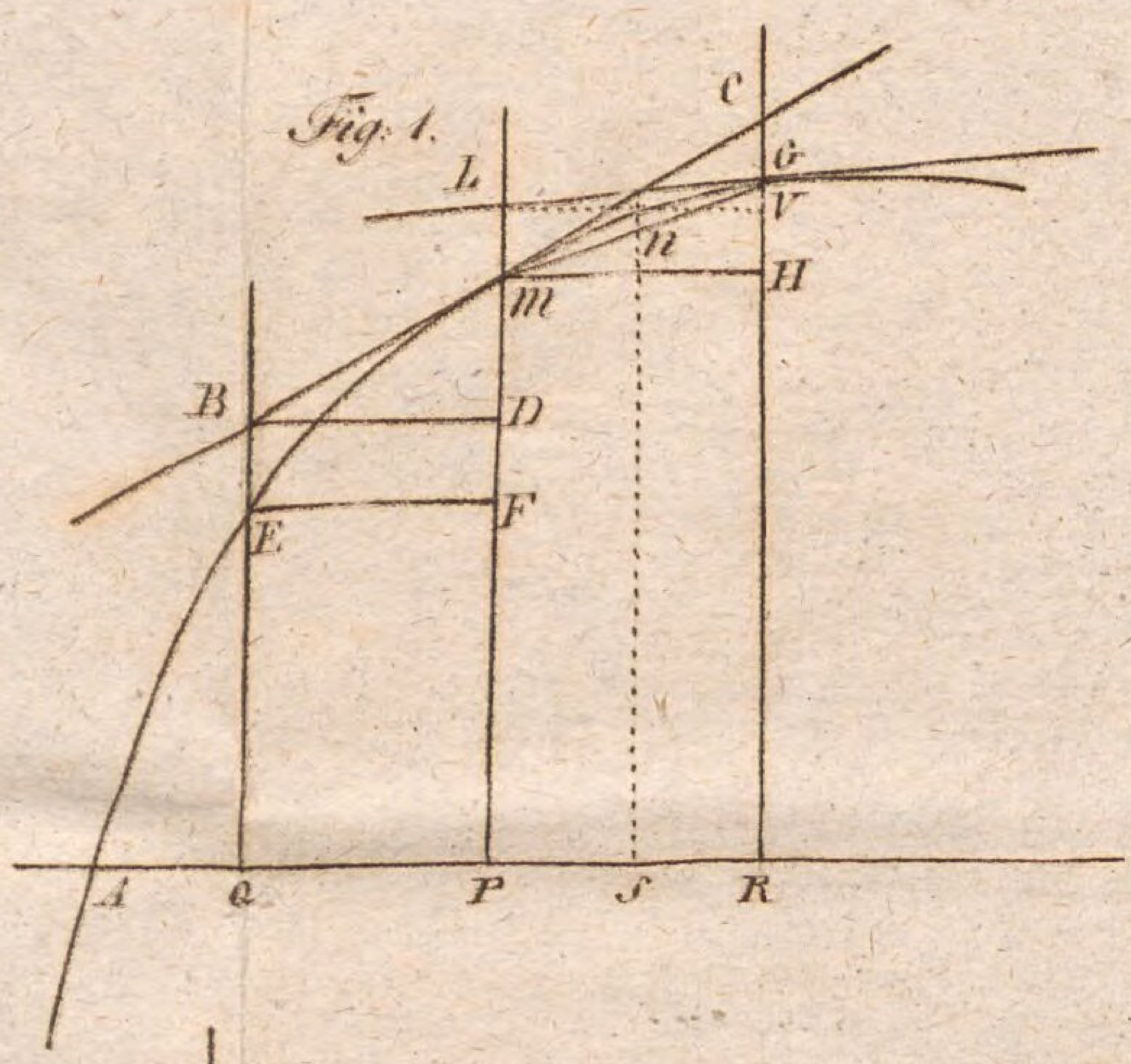


Fig: 1.
C
L
G
V
n
H
m
B
D
E
F
A Q P S R

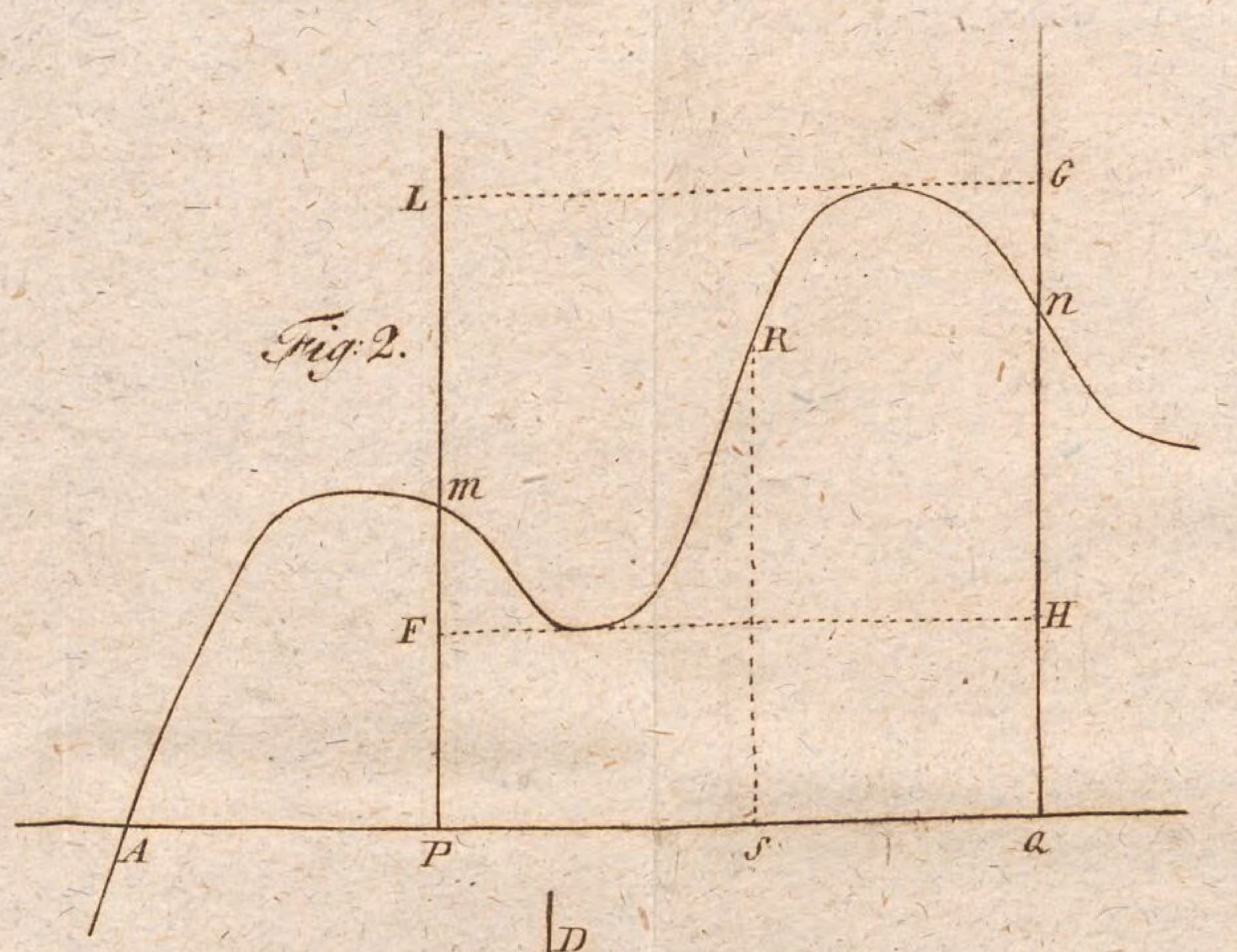


Fig: 2.
L
G
n
R
m
F
H
A P S Q

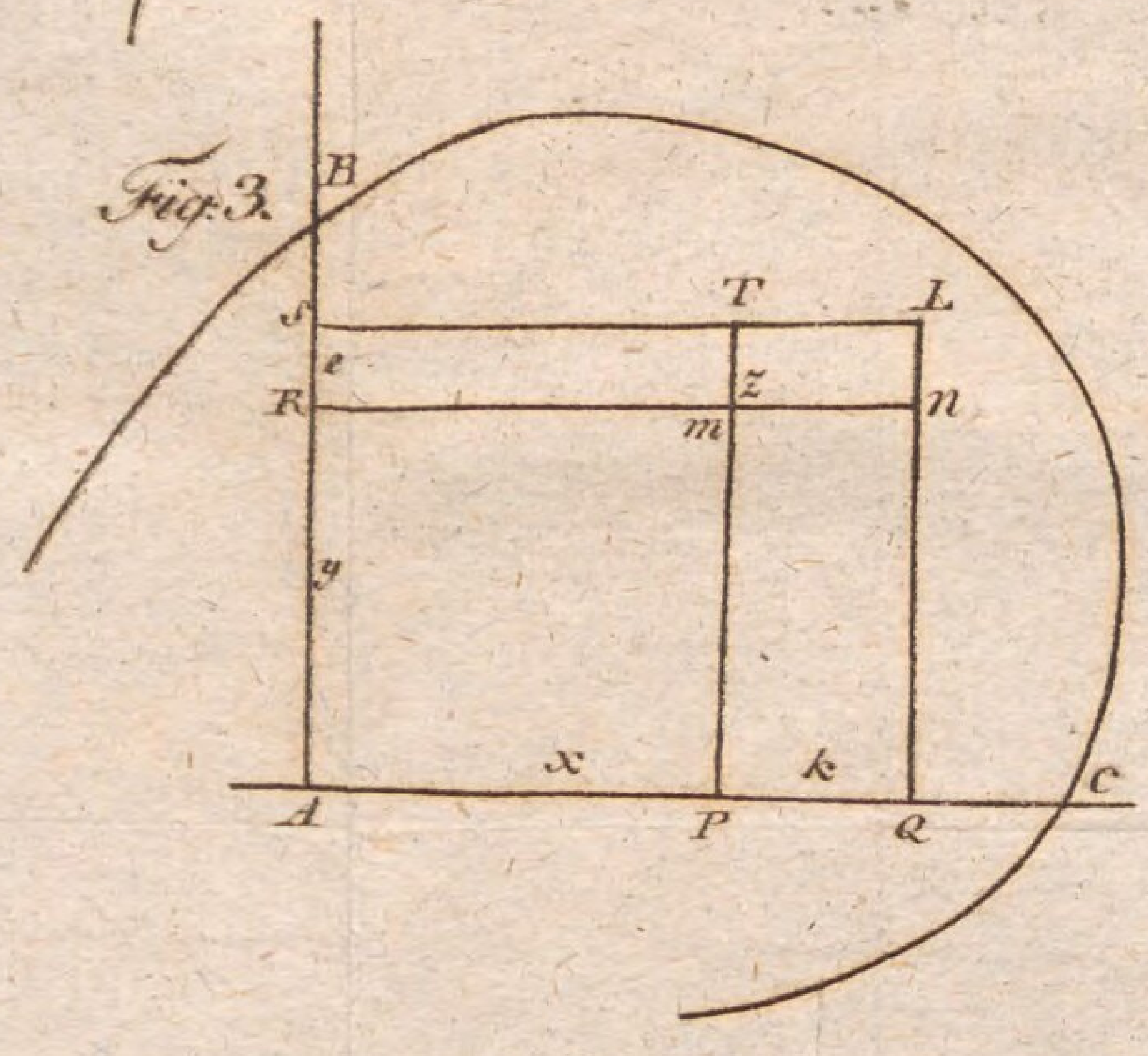
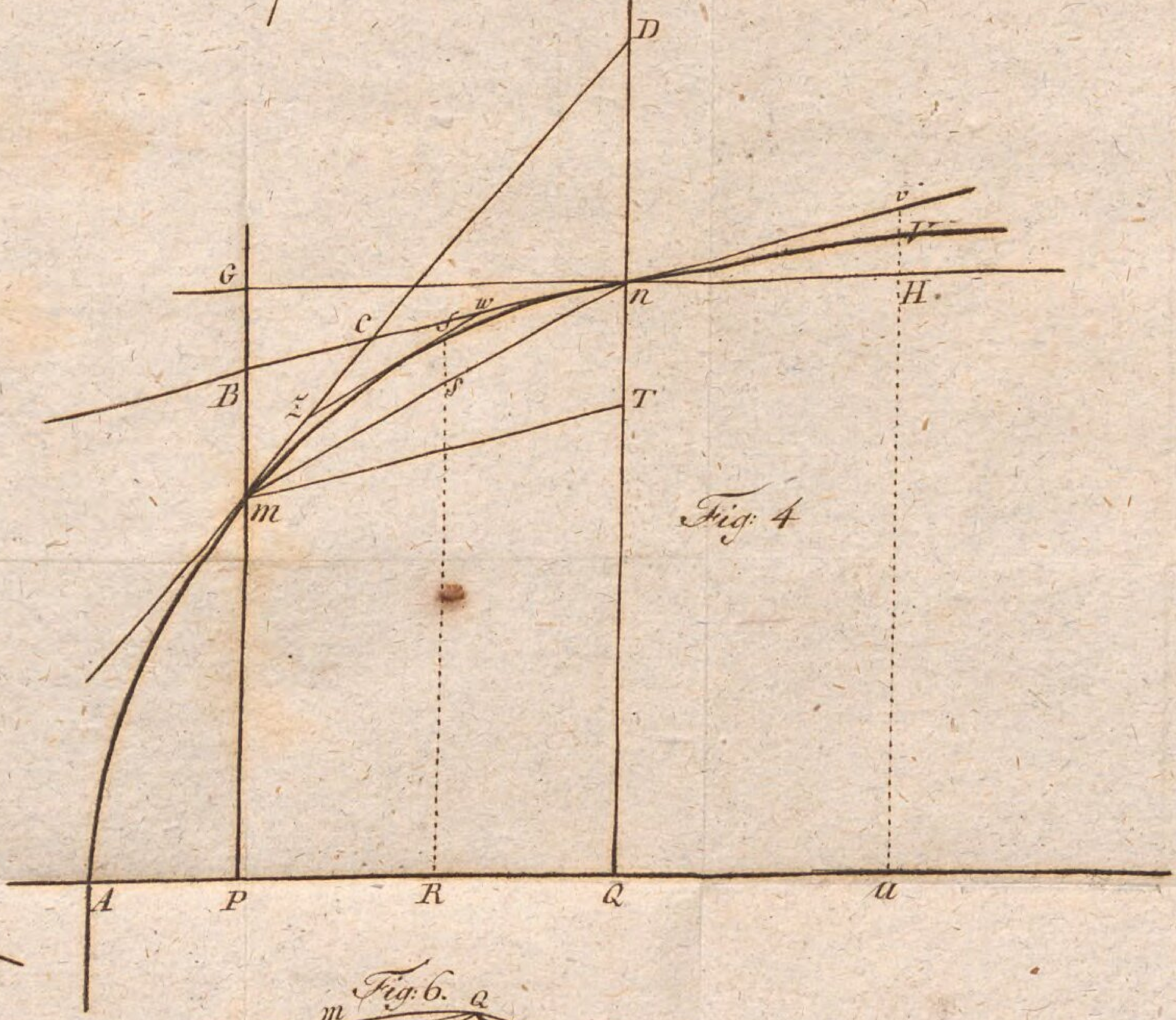


Fig: 3.
B
S
T
L
e
z
R
m
n
y
x
k
A P Q C


D
v
V
G
n
H
C
w
B
z
T
m
Fig: 4
A P R Q u

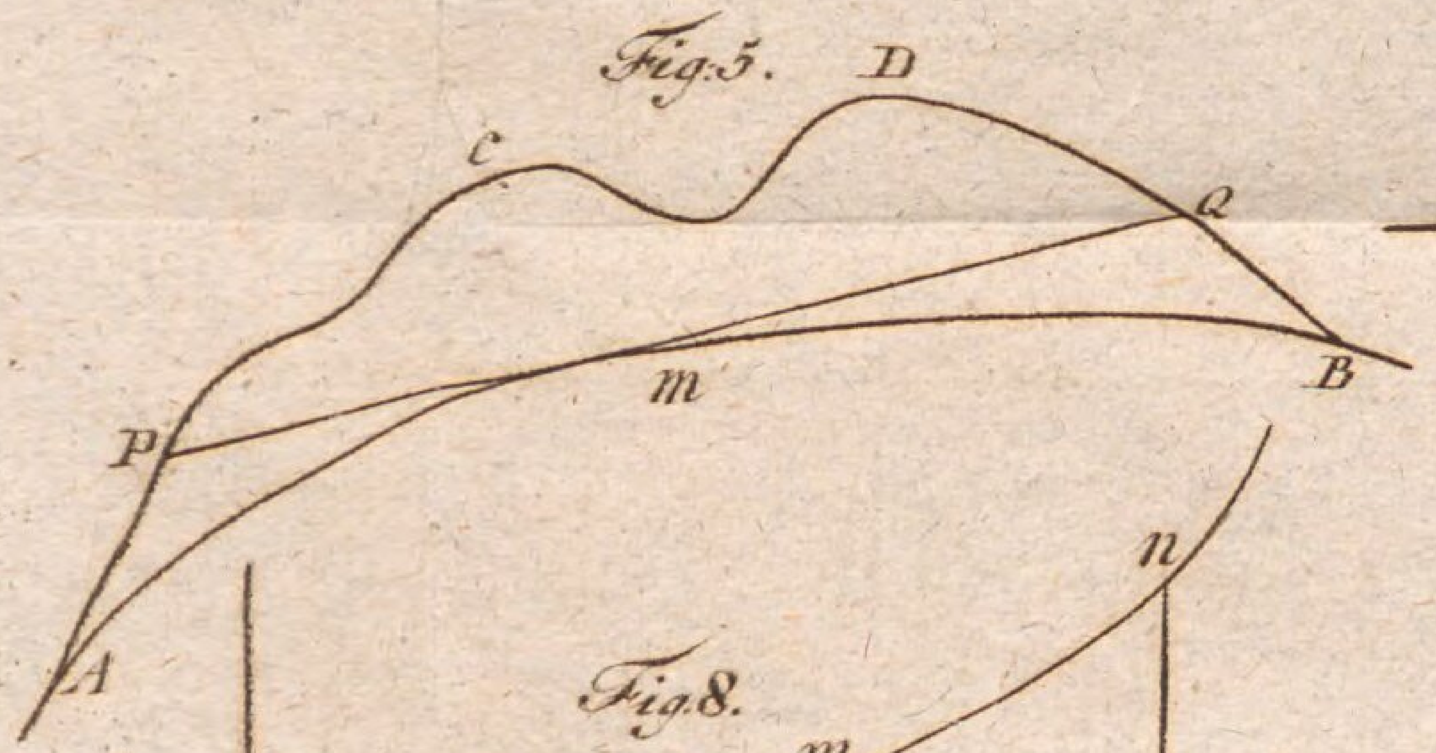


Fig: 5.
D
C
Q
m
B
P
A

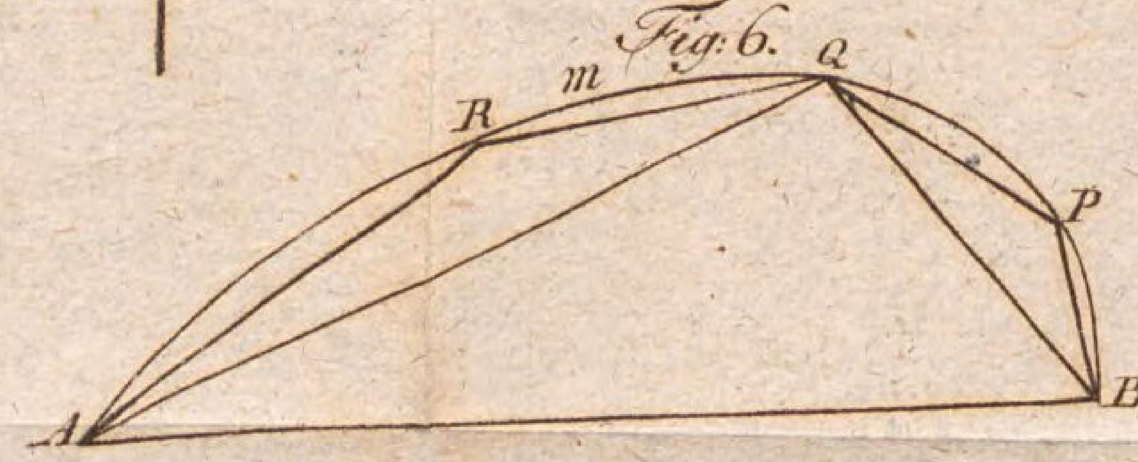


Fig: 6.
R m Q
P
A
B

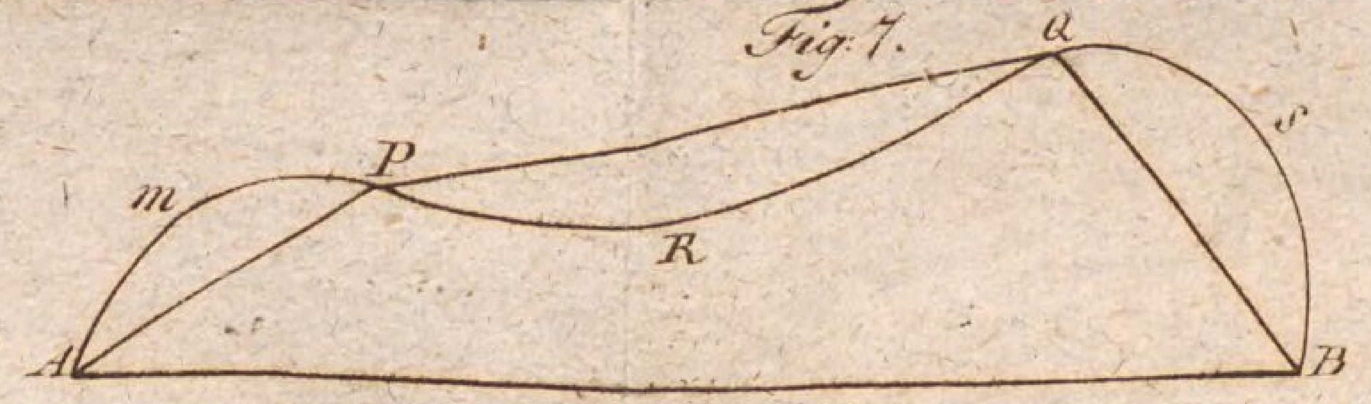


Fig: 7.
Q
S
m
P
R
A
B

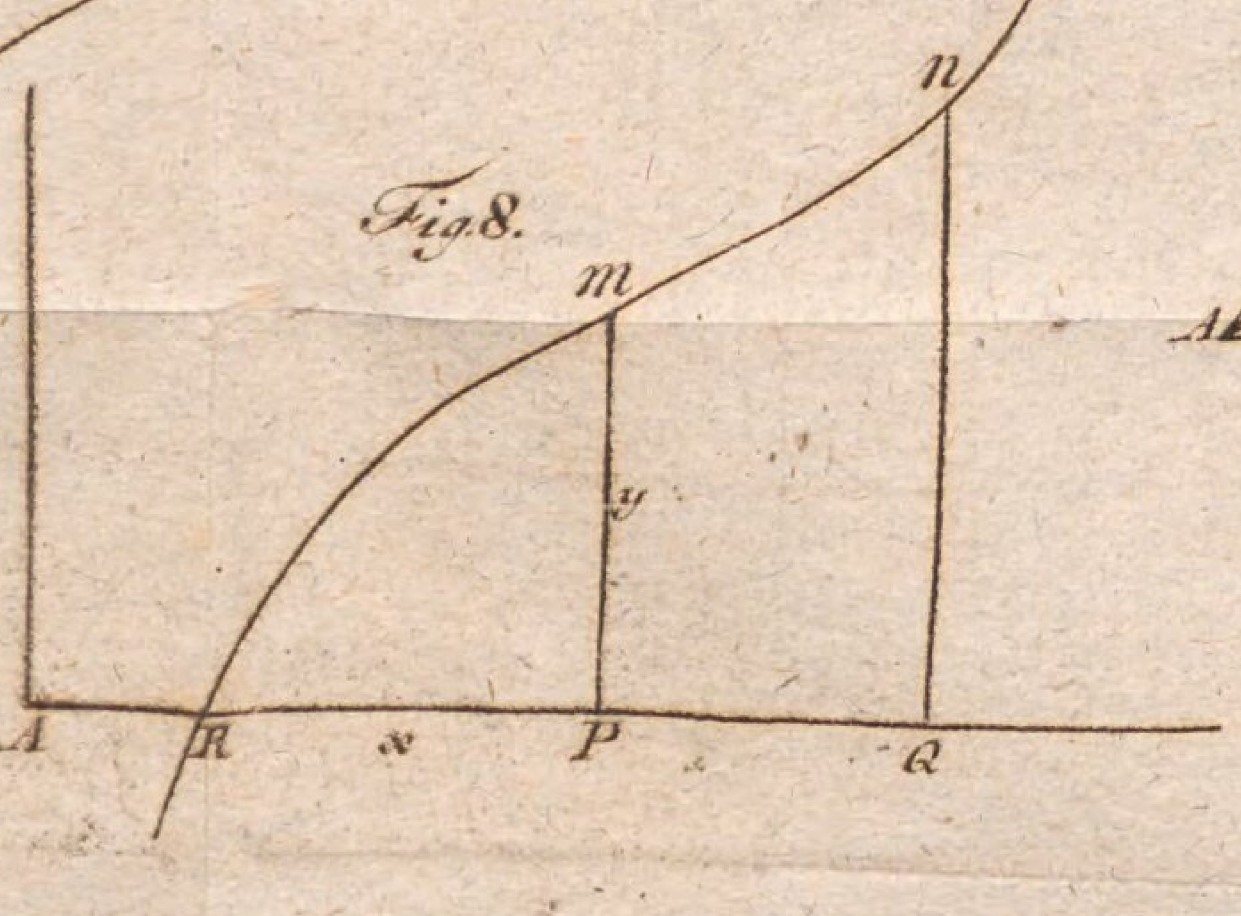


Fig. 8.
n
m
y
A R x P Q

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Crelle, August L.,

Ueber die Anwendung der Rechnung mit veränderlichen Größen auf Geometrie und Mechanik Nebst einigen vorhergehenden Bemerkungen über die Principien dieser Rechnung ; Mit einem Kupfer

Berlin 1816

Math.p. 96 g
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081631-5